Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

> М.Э.Рояк, Ю.Г.Соловейчик, Э.П.Шурина

Сеточные методы решения краевых задач математической физики

Учебное пособие для студентов III курса специальности 510200

> НОВОСИБИРСК 1998

Рояк М.Э., Соловейчик Ю.Г., Шурина Э.П. Сеточные методы решения краевых задач математической физики: Учеб.пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 120 с.

В учебном пособии рассматриваются вопросы построения дискретных аналогов одно- и двумерных краевых задач методами конечных элементов и конечных объемов. Основное внимание уделяется особенностям построения матриц и векторов правых частей систем линейных алгебраических уравнений, получаемых в результате аппроксимации краевых задач для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типа.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности «Прикладная математика», а также для студентов и аспирантов других специальностей, интересующихся возможностями сеточных методов при их использовании для численного моделирования электромагнитных и тепловых полей.

Ил. 25, список лит. 14 назв.

Рецензенты: Г.И.Дудникова, д-р техн. наук, проф., Н.Б.Иткина, канд. техн. наук, доц.

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики

СОДЕРЖАНИЕ

Введ	ение	
1. краен	вых зада	Математические модели физических процессов в виде краевых и начально- ч для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов4
	1.1.	Краевые задачи для уравнения эллиптического типа4
	1.2.	Начально-краевые задачи для уравнений параболического типа6
	1.3.	Начально-краевые задачи для уравнений гиперболического типа7
2. задач	ł	Применение метода конечных объемов для решения эллиптических краевых 9
	2.1.	Применение МКО для решения одномерной эллиптической краевой задачи9
	2.2.	Конечнообъемная аппроксимация двумерных эллиптических краевых задач на прямоугольных сетках
	2.3.	Применение МКО для решения эллиптических краевых задач на треугольных сетках
3. на ос	снове экв	Построение конечноэлементных аппроксимаций эллиптических краевых задач ивалентных вариационных формулировок
	3.1.	Основные аспекты МКЭ. Эквивалентные краевым задачам вариационные постановки. Аппроксимация на конечномерных подпространствах
	3.2.	Основные принципы построения базисных функций конечномерных подпространств и способы представления параметров краевых задач в эквивалентных вариационных постановках
	3.3.	Применение МКЭ для решения одномерных задач на подпространствах с кусочно-линейными, кусочно-квадратичными и кусочно-кубическими базисными функциями
	3.4.	Применение МКЭ для решения двумерных краевых задач на прямоугольных сетках
	3.5.	Применение МКЭ для решения двумерных краевых задач на треугольных сетках
4. МКС) и МКЭ	Построение дискретных аналогов нестационарных задач с использованием 109
	4.1.	Аппроксимация начально-краевых задач для дифференциальных уравнений параболического типа
	4.2.	Аппроксимация начально-краевых задач для дифференциальных уравнений гиперболического типа116
Спис	ок литер	ратуры120

Введение

С развитием вычислительной техники сеточные методы стали одними из наиболее эффективных методов решения сложных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. В зависимости от способа построения приближенного решения эти методы можно разбить на два больших класса:

- сеточные методы, основанные на непосредственной аппроксимации либо самого дифференциального уравнения, либо соответствующих этому дифференциальному уравнению интегробалансных соотношений – это метод конечных разностей (МКР) /8, 12/ метод конечных (контрольных) объемов (МКО) /1-6, 12/;
- сеточные методы, основанные на использовании вариационных формулировок, эквивалентных исходной дифференциальной краевой задаче, это метод конечных элементов (МКЭ) в различных вариантах (в форме Ритца, Галеркина, наименьших квадратов, коллокации) /7-11, 13, 14/.

В данном учебном пособии будут рассмотрены возможности МКО и МКЭ при решении одно- и двумерных краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов. Главное внимание при этом будет обращено на особенности построения матриц и векторов правых частей систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), получаемых в результате аппроксимации исходных краевых задач. Будут также обсуждены вопросы точности используемых аппроксимаций, но не столь подробно по сравнению с вопросами генерации аппроксимирующих СЛАУ.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВИДЕ КРАЕВЫХ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО, ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

В данной главе будут сформулированы основные краевые задачи, описывающие процессы теплообмена, фильтрации, безвихревого течения идеальной жидкости, течения вязкой жидкости в канале (при отсутствии вторичных течений), а также процессы распространения электромагнитных полей в пространстве и во времени.

1.1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Эллиптическая краевая задача определяется дифференциальным уравнением

$$-\operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) + \gamma u = f, \qquad (1.1)$$

заданным в некоторой области Ω с границей $S=S_1 \cup S_2 \cup S_3$, и краевыми условиями

$$u\big|_{S_1} = u_g , \qquad (1.2)$$

$$p\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_2} = \Theta, \qquad (1.3)$$

$$p\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_3} + \beta\Big(u\Big|_{S_3} - u_\beta\Big) = 0, \qquad (1.4)$$

в которых $u|_{S_i}$ – значение функции u на границе S_i , а $\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_i}$ – значение на S_i про-

изводной функции *и* по направлению внешней нормали к поверхности *S*_{*i*}.

Краевая задача (1.1)–(1.4) может описывать стационарное распределение температуры u в области Ω , если p – коэффициент теплопроводности, а $(f-\gamma u)$ – плотность объемных источников тепла. При этом краевое условие первого рода (1.2) соответствует заданию на части S_1 границы S области Ω температуры u_{g} , краевое условие второго рода (1.3) – заданию на S_2 плотности теплового потока, равного θ , а краевое условие третьего рода (1.4) – заданию на S_3 плотности теплового потока, пропорциональной разности температуры u на границе S_3 и температуры u_{β} окружающей среды (коэффициент пропорциональности $\beta>0$ в этом случае называется коэффициентом теплоотдачи).

Уравнение (1.1) может описывать также стационарное распределение потенциала электрического поля в проводящей электрический ток среде. В этом случае u – потенциал напряженности \vec{E} электрического поля (т.е. $\vec{E} = -\text{grad}u$), p – проводимость среды, f – плотность объемных источников тока (коэффициент γ в таких задачах, как правило, равен нулю). Задание первого краевого условия на границе S_1 позволяет зафиксировать значение потенциала u на этой границе, а с помощью второго краевого условия может быть задана плотность стекающего в проводящую среду электрического тока.

Изучение стационарных электрических и магнитных полей в задачах электростатики и магнитостатики также базируется на решении эллиптических краевых задач. Краевые условия в таких задачах, как правило, только первого и второго рода и однородные, т.е. с нулевыми правыми частями в (1.2) и (1.3). При этом для описания стационарных магнитных полей может быть использовано как уравнение (1.1) с коэффициентом γ =0, так и векторное уравнение

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}\right) = \vec{J} , \qquad (1.5)$$

где μ – магнитная проницаемость среды, \vec{A} – вектор-потенциал, \vec{J} – вектор плотности токов.

Заметим, что при определенных условиях уравнение (1.5) может быть преобразовано к виду (1.1). Такая ситуация возникает, например, при решении двумерных задач магнитостатики, когда вектор-потенциал \vec{A} имеет лишь одну ненулевую компоненту, являющуюся функцией только двух независимых переменных: в декартовых координатах $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, 0, A_z)$ и $A_z = A_z(x, y)$; в цилиндрических координатах (для так называемых осесимметричных задач) $\vec{A} = (A_r, A_{\phi}, A_z) = (0, A_{\phi}, 0)$ и $A_{\phi} = A_{\phi}(r, z)$. Тем не менее, при решении двумерных задач магнитостатики очень часто дискретный аналог строят на основании аппроксимации краевой задачи для уравнения, записанного именно в виде (1.5).

Если принять область Ω за поперечное сечение канала, p – за коэффициент вязкости, u – за скорость течения жидкости вдоль оси канала, а f – за силу, то при однородном краевом условии $u|_{S} = 0$ и отсутствии вторичных течений решение уравнения (1.1) дает профиль продольной скорости течения вязкой жидкости в канале с постоянным поперечным сечением (краевое условие $u|_{S} = 0$ задает условие прилипания частиц жидкости к стенкам канала).

Уравнение (1.1) с краевыми условиями первого и второго рода, характеризующими проницаемые и непроницаемые участки границы области Ω , описывает процесс фильтрации, если *u* – напор, а *p* – коэффициент фильтрации. Краевая задача для уравнения (1.1) с коэффициентом $\gamma=0$ и правой частью *f*=0 может быть использована для описания установившегося безвихревого течения идеальной жидкости, причем *u* в этом случае является потенциалом вектора скорости (т.е. $\vec{V} = -\text{grad}u$).

1.2. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Многие нестационарные физические процессы описываются краевыми задачами для уравнений параболического типа, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + \gamma u = f, \qquad (1.6)$$

причем коэффициенты σ , p, γ и f могут быть функциями не только пространственных координат, но и времени t. Краевая задача для уравнения (1.6) с начальным условием

$$u\big|_{t=t_0} = u_0 \tag{1.7}$$

(где u_0 – функция, заданная в области Ω) может описывать нестационарные процессы теплообмена и фильтрации. К решению начально-краевых задач для уравнения вида (1.6) могут быть сведены задачи определения двумерных нестационарных электромагнитных полей. При изучении же распространения возбуждаемого током в круговой петле электромагнитного поля в осесимметричной среде, имеющей подобласти с ненулевой проводимостью, для построения дискретного аналога необходимо использовать параболическое уравнение в виде

$$\operatorname{rot}_{\varphi}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} = J_{\varphi},\tag{1.8}$$

где σ – коэффициент проводимости среды, μ (как и в уравнении (1.5)) – коэффициент магнитной проницаемости, $\vec{A} = (A_r, A_{\phi}, A_z) = (0, A_{\phi}, 0)$ – векторпотенциал с единственной ненулевой компонентой A_{ϕ} , являющейся функцией только двух пространственных переменных *r* и *z* и времени: $A_{\phi} = A_{\phi}(r, z, t)$. Под гот_{ϕ} \vec{G} в уравнении (1.8) понимается ϕ -компонента вектора гот \vec{G} в цилиндрической системе координат, а сам вектор гот \vec{G} определяется соотношением

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial G_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial G_{\varphi}}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r}\right)\vec{e}_{\varphi} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rG_{\varphi})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial G_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z, \quad (1.9)$$

где $\vec{e}_r, \vec{e}_{\phi}, \vec{e}_z$ – единичные орты в цилиндрической системе координат.

Отметим, что начально-краевые задачи параболического типа описывают процессы с бесконечной скоростью распространения. Это означает, что при появлении в какой-либо момент времени источника поля в одной части пространства реакция на него будет ненулевой в любой сколь угодно близкий момент времени в любой сколь угодно далекой от источника точке пространства. На первый взгляд это противоречит основным законам физики, но на самом деле для многих практически важных задач решение параболического уравнения очень точно описывает реальный физический процесс. К таким процессам можно отнести почти все тепловые и очень многие электромагнитные процессы, изучаемые на временных интервалах, не сопоставимых по величине с временными интервалами, на которых может оказаться существенной конечная скорость распространения реального процесса.

1.3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Для описания физических процессов, в которых необходимо учитывать конечную скорость распространения возмущений, используются уравнения гиперболического типа

$$-\operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f.$$
(1.10)

К таким процессам можно отнести процессы распространения электромагнитных волн в тех случаях, когда нельзя пренебречь токами смещения, а также процессы распространения звуковых волн. Например, уравнение гиперболического типа (1.10) может быть использовано как для описания распространения в воздухе трехмерных электромагнитных волн, так и для описания распространения звуковых волн. При необходимости учета токов смещения (и, соответственно, конечной скорости движения электромагнитной волны) для описания распространения возбуждаемого током в круговой петле электромагнитного поля в осесимметричной среде, содержащей подобласти с ненулевой проводимостью, применяется уравнение гиперболического типа следующего вида:

$$\operatorname{rot}_{\varphi}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} + \chi\frac{\partial^2 A_{\varphi}}{\partial t^2} = J_{\varphi}, \qquad (1.11)$$

в котором потенциал $\vec{A} = (A_r, A_{\phi}, A_z)$ имеет единственную ненулевую компоненту, являющуюся функцией двух пространственных координат *r* и *z* и времени *t*: $A_{\phi} = A_{\phi}(r, z, t)$, $A_r \equiv 0$, $A_z \equiv 0$ (коэффициент χ в уравнении (1.11) является коэффициентом диэлектрической проницаемости среды, остальные коэффициенты в (1.11) имеют тот же смысл, что и в уравнениях (1.5) и (1.8)). Решение соответствующих начально-краевых задач необходимо при разработке и совершенствования новых методов электромагнитного зондирования Земли с использованием аппаратуры, регистрирующей изменение электромагнитного поля на очень ранних стадиях после выключения тока в порождающей поле круговой петле.

Процессы распространения трехмерных электромагнитных волн в неоднородных по проводимости, магнитной и диэлектрической проницаемости средах также описываются системой уравнений гиперболического типа. Вычислительные процедуры построения численного решения такого рода задач довольно сложны технически, но используемые в них методы аппроксимации принципиально не слишком сильно отличаются от методов, используемых в процедурах численного моделирования распространения электромагнитных волн в осесимметричных средах и численного решения трехмерных уравнений гиперболического типа.

Отметим, что после проведения аппроксимации по времени уравнений параболического типа (1.6) или (1.8) или уравнений гиперболического типа (1.10) или (1.11) процедуры проведения их конечноэлементной или конечнообъемной аппроксимации по пространственным переменным практически не отличаются от аналогичных процедур для соответствующих уравнений эллиптического типа (1.1) или(1.5). Поэтому все основные аспекты техники проведения конечнообъемной или конечноэлементной аппроксимации по пространственным переменным для задач всех типов будут рассмотрены нами в основном при решении эллиптических краевых задач, а в главе, посвященной решению параболических или гиперболических начально-краевых задач, основное внимание будет уделено изучению различных процедур их аппроксимации по времени и связанным с ними особенностям построения вычислительных процессов решения нестационарных задач.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Основная идея метода конечных объемов (МКО), называемого также методом контрольных объемов, балансным методом, бокс-методом и т.п. /1-6, 12/, заключается в следующем. Расчетная область разбивается на элементарные объемы, и дифференциальное уравнение в краевой задаче заменяется интегральными балансными соотношениями для каждого из этих элементарных объемов. После этого интегралы в интегробалансных соотношениях аппроксимируются с использованием значений искомой функции в узлах сетки или значений производных искомой функций, взятых из краевых условий. В результате получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решением которой является вектор значений искомой функции в узлах сетки.

Техника аппроксимации при использовании МКО для решения многомерных (двумерных и трехмерных) задач существенно зависит от того, на ячейки какой формы разбивается расчетная область. При этом конечные объемы, в которых интегробалансные соотношения заменяются своими дискретными аналогами, не являются ячейками дискретизации расчетной области. Ячейки дискретизации расчетной области характеризуются тем, что узлы сетки, в которых будут вычисляться значения решения и исходной краевой задачи, являются, как правило, вершинами этих ячеек (для более сложных аппроксимаций это условие может выполняться не для всех узлов, но в любом случае должно выполняться другое, более сложное условие: интерполирующие полиномы искомой функции и, построенные по ее узловым значениям, определяются на ячейках дискретизации расчетной области, а не на самих конечных объемах). Каждый же из конечных объемов строится вокруг узлов сетки из отдельных частей ячеек дискретизации расчетной области, примыкающих к соответствующим узлам, причем форма конечного объема может существенно отличаться от формы ячеек дискретизации расчетной области. Но прежде чем изучать особенности применения МКО для решения двумерных краевых задач, рассмотрим основные аспекты техники выполнения конечнообъемных аппроксимаций на примере решения одномерной эллиптической краевой задачи.

2.1. ПРИМЕНЕНИЕ МКО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Построим дискретный аналог задачи (1.1)-(1.4) на основе ее конечнообъемной аппроксимации. Областью определения Ω уравнения (1.1) в одномерном

случае является интервал (a, b), а границами S_1 , S_2 и S_3 , на которых заданы соответствующие краевые условия (1.2)-(1.4), либо точка a, либо точка b, либо пустое множество (если соответствующее краевое условие отсутствует в краевой задаче).

Нанесем на интервал (a, b) сетку с узлами x_k , удовлетворяющими соотношениям: $a=x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Узлы x_k разбивают расчетную область Ω на (n-1) ячейку $\Omega_k = (x_k, x_{k+1}), k=1, ..., n-1$.

Обозначим через Ω'_k левую половину $\left(x_k, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ ячейки Ω_k , а через

 Ω_k'' – правую половину $\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, x_{k+1}\right)$ ячейки Ω_k . Вокруг каждого внутрен-

него узла x_k (k=2,..., n-1) построим конечный объем $\tilde{\Omega}_k$, состоящий из двух половинок примыкающих к x_k ячеек дискретизации $\tilde{\Omega}_k = \Omega''_{k-1} \cup \Omega'_k$. Соответствующие же граничным узлам x_1 и x_n конечные объемы $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_n$ будут состоять из одной из половинок ячеек Ω_1 и Ω_{n-1} : $\tilde{\Omega}_1 = \Omega'_1$, $\tilde{\Omega}_n = \Omega''_{n-1}$. Разбиение расчетной области $\Omega = (a, b)$ на ячейки дискретизации Ω_k и конечные объемы $\tilde{\Omega}_k$ показано на рис.1.



Рис. 1. Разбиение расчетной области $\Omega = (a, b)$ на ячейки дискретизации Ω_k и конечные объемы $\widetilde{\Omega}_k$

Проинтегрируем уравнение (1.1) по каждому из конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$. В результате получим *n* уравнений, которые имеют следующий вид:

$$-\int_{\widetilde{\Omega}_{k}} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) d\Omega + \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} \gamma u d\Omega = \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} f d\Omega, \quad k=1,\dots,n.$$
(2.1)

Учитывая, что для внутренних узлов x_k (k=2,...,n-1) содержащие их конечные объемы имеют вид $\tilde{\Omega}_k = \Omega_{k-1}^" \cup \Omega_k' = \left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$, для граничных узлов $\tilde{\Omega}_1 = \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ (для x_1) и $\tilde{\Omega}_n = \left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}, x_n\right)$ (для x_n), а также то, что в одномерном случае операторы div и grad имеют вид $\frac{d}{dx}$, мы можем записать систему (2.1) в виде

$$-\frac{\sum_{x_{1}}^{x_{1}+x_{2}}}{\int_{x_{1}}^{2}}\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)dx + \frac{\sum_{x_{1}}^{x_{1}+x_{2}}}{\int_{x_{1}}^{2}\gamma u dx} = \frac{\sum_{x_{1}}^{x_{1}+x_{2}}}{\int_{x_{1}}^{2}f dx},$$
(2.2)

$$-\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \gamma u dx = \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} f dx, \quad k=2,...,n-1,$$
(2.3)

$$-\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_n} \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_n} \gamma u dx = \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_n} f dx, \qquad (2.4)$$

где под $x_{k-\frac{1}{2}}$ понимается точка $\frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, а под $x_{k+\frac{1}{2}}$ – соответственно точка $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Значения интегралов в первых слагаемых левых частей уравнений (2.2)-(2.4) очевидны – это разность значений величины $p \frac{du}{dx}$ на границах интервала интегрирования:

$$\int_{x_{1}}^{x_{1}+x_{2}} \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) dx = p \frac{du}{dx} \Big|_{\frac{x_{1}+x_{2}}{2}} - p \frac{du}{dx} \Big|_{x_{1}},$$
(2.5)

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) dx = p \frac{du}{dx} \bigg|_{x_{k+\frac{1}{2}}} - p \frac{du}{dx} \bigg|_{x_{k-\frac{1}{2}}}, \quad k=2,...,n-1,$$
(2.6)

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_n} \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) dx = p \frac{du}{dx} \bigg|_{x_n} - p \frac{du}{dx} \bigg|_{x_{n-\frac{1}{2}}}.$$
(2.7)

Чтобы вычислить значения $p \frac{du}{dx} \Big|_{x_{k\pm \frac{1}{2}}}$ в правых частях соотношений

(2.5)-(2.7), а также значения интегралов от γu и f в уравнениях (2.2)-(2.4), при-

меним следующие соглашения о поведении приближенного решения u, коэффициент γ и функции f на ячейках дискретизации $\Omega_k = (x_k, x_{k+1})$. Будем считать, что функция u линейно изменяется на Ω_k от значения u_k в точке $x = x_k$ до значения u_{k+1} в точке $x = x_{k+1}$. Аналогично и функция f линейно изменяется на Ω_k от значения f_k в точке $x = x_k$ до значения f_{k+1} в точке $x = x_{k+1}$. Коэффициент же γ будем считать на Ω_k постоянным и равным значению $\gamma_{k+\frac{1}{2}}$ (т.е. равным точному значению коэффициента γ в точке $x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$). Обозначим через h_k длину

ячейки $\Omega_k h_k = x_{k+1} - x_k$. Тогда

$$p\frac{du}{dx}\Big|_{x_{k-\frac{1}{2}}} = p_{k-\frac{1}{2}}\frac{u_k - u_{k-1}}{h_{k-1}}, \qquad p\frac{du}{dx}\Big|_{x_{k+\frac{1}{2}}} = p_{k+\frac{1}{2}}\frac{u_{k+1} - u_k}{h_k}, \qquad (2.8)$$

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k}} \gamma u dx = \gamma_{k-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{u_{k-1} + u_{k}}{2} + u_{k} \right) \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{\gamma_{k-\frac{1}{2}} h_{k-1}}{8} (3u_{k} + u_{k-1}),$$
(2.9)

$$\int_{x_{k}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \gamma u dx = \gamma_{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(u_{k} + \frac{u_{k} + u_{k+1}}{2} \right) \frac{h_{k}}{2} = \frac{\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}}{8} (3u_{k} + u_{k+1}), \quad (2.10)$$

$$\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k}} f dx = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{k-1} + f_{k}}{2} + f_{k} \right) \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{h_{k-1}}{8} \left(3f_{k} + f_{k-1} \right),$$
(2.11)

$$\int_{x_{k}}^{x_{k+\frac{j_{k}}{2}}} f dx = \frac{1}{2} \left(f_{k} + \frac{f_{k} + f_{k+1}}{2} \right) \frac{h_{k}}{2} = \frac{h_{k}}{8} \left(3f_{k} + f_{k+1} \right).$$
(2.12)

При вычислении интегралов в соотношениях (2.9)-(2.12) мы использовали тот факт, что определенный интеграл от линейной на интервале интегрирования функции равен полусумме значений функции на концах интервала, умноженной на длину интервала интегрирования (т.е. площади соответствующей трапеции).

Подставляя соотношения (2.5)-(2.7) и (2.9)-(2.12) в систему (2.2)-(2.4) и учитывая соотношения (2.8), получим

$$-\left(p_{1+\frac{1}{2}}\frac{u_2-u_1}{h_1}-p\frac{du}{dx}\Big|_{x_1}\right)+\frac{\gamma_{1+\frac{1}{2}}h_1}{8}(3u_1+u_2)=\frac{h_1}{8}(3f_1+f_2),$$
(2.13)

$$-\left(p_{k+\frac{1}{2}}\frac{u_{k+1}-u_{k}}{h_{k}}-p_{k-\frac{1}{2}}\frac{u_{k}-u_{k-1}}{h_{k-1}}\right)+\frac{\gamma_{k-\frac{1}{2}}h_{k-1}}{8}(3u_{k}+u_{k-1})+\frac{\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}}{8}(3u_{k}+u_{k+1})=\frac{h_{k-1}}{8}(3f_{k}+f_{k-1})+\frac{h_{k}}{8}(3f_{k}+f_{k+1}), \qquad (2.14)$$

$$-\left(p\frac{du}{dx}\Big|_{x_n} - p_{n-\frac{1}{2}}\frac{u_n - u_{n-1}}{h_{n-1}}\right) + \frac{\gamma_{n-\frac{1}{2}}h_{n-1}}{8}(3u_n + u_{n-1}) = \frac{h_{n-1}}{8}(3f_n + f_{n-1}). \quad (2.15)$$

Если на границах области Ω заданы краевые условия второго или третьего рода, то входящие в уравнения (2.13) и (2.15) слагаемые $p \frac{du}{dx}\Big|_{x_1}$ и $p \frac{du}{dx}\Big|_{x_n}$ могут

быть получены из них с учетом того, что в точке x_1 производная по нормали $\frac{du}{dn} = -\frac{du}{dx}$, а в точке x_n эта производная $\frac{du}{dn} = \frac{du}{dx}$ (т.е. на левой границе Ω направление внешней нормали n противоположно направлению x, а на правом – совпадает с направлением оси x). Для определенности будем считать, что на левом конце Ω задано краевое условие второго рода (1.3), т.е. S_2 – это точка x_1 , а на правом – краевое условие третьего рода (1.4) (т.е. S_3 – это точка x_n). Тогда в уравнении (2.13) слагаемое $p\frac{du}{dx}\Big|_{x_1}$ может быть заменено на - θ , (так как $p\frac{du}{dx}\Big|_{x_1} = -p\frac{du}{dn}\Big|_{S_2}$ и из (1.3) $-p\frac{du}{dn}\Big|_{S_2} = -\theta$), а в уравнении из (2.15) слагаемое $p\frac{du}{dx}\Big|_{x_n}$ может быть заменено на $-\beta(u_n - u_\beta)$ (так как $p\frac{du}{dx}\Big|_{x_n} = -p\frac{du}{dn}\Big|_{S_3}$ и из (1.4) $p\frac{du}{dn}\Big|_{s_2} = -\beta(u\Big|_{S_3} - u_\beta)$, причем $u\Big|_{S_3} = u_n$). Учитывая это и группируя в уравнести и уравнести с и сама и сама

нениях (2.13)-(2.15) члены, содержащие одни и те же неизвестные с *u_i*, получим

$$\left(\frac{p_{1+\frac{1}{2}}}{h_1} + \frac{3\gamma_{1+\frac{1}{2}}h_1}{8}\right)u_1 + \left(-\frac{p_{1+\frac{1}{2}}}{h_1} + \frac{\gamma_{1+\frac{1}{2}}h_1}{8}\right)u_2 = \frac{h_1}{8}(3f_1 + f_2) + \theta, \qquad (2.16)$$

$$\left(-\frac{p_{k-\frac{1}{2}}}{h_{k-1}} + \frac{\gamma_{k-\frac{1}{2}}h_{k-1}}{8} \right) u_{k-1} + \left(\frac{p_{k-\frac{1}{2}}}{h_{k-1}} + \frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{h_{k}} + \frac{3}{8} (\gamma_{k-\frac{1}{2}}h_{k-1} + \gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}) \right) u_{k} + \left(-\frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{h_{k}} + \frac{\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}}{8} \right) u_{k+1} = \frac{h_{k-1}}{8} (3f_{k} + f_{k-1}) + \frac{h_{k}}{8} (3f_{k} + f_{k+1}), \quad k = 2, ..., n-1,$$

$$(2.17)$$

$$\left(-\frac{p_{n-\frac{1}{2}}}{h_{n-1}} + \frac{\gamma_{n-\frac{1}{2}}h_{n-1}}{8} \right) u_{n-1} + \left(\frac{p_{n-\frac{1}{2}}}{h_{n-1}} + \frac{3\gamma_{n-\frac{1}{2}}h_{n-1}}{8} + \beta \right) u_n =$$

$$= \frac{h_{n-1}}{8} (3f_n + f_{n-1}) + \beta u_\beta .$$

$$(2.18)$$

Уравнения (2.16)-(2.18) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для вектора $U = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ значений искомой функции *и* в узлах сетки. При этом в первой строке матрицы *А* этой СЛАУ только две ненулевых компоненты a_{11} и a_{12} – это коэффициенты, на которые в уравнении (2.16) умножаются неизвестные u_1 и u_2 соответственно:

$$a_{11} = \frac{p_{1+\frac{1}{2}}}{h_1} + \frac{3\gamma_{1+\frac{1}{2}}h_1}{8}, \qquad a_{12} = -\frac{p_{1+\frac{1}{2}}}{h_1} + \frac{\gamma_{1+\frac{1}{2}}h_1}{8}.$$
(2.19)

Действительно, первое уравнение СЛАУ AU=G имеет вид $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} = g_1$, и отсут-

ствие в уравнении (2.16) членов с неизвестными $u_3, ..., u_n$ означает, что соответствующие компоненты $a_{13}, ..., a_{1n}$ в матрице A должны быть равны нулю. Аналогично каждая из строк матрицы A с номером k=2, ..., n-1 содержит три нулевых компоненты

$$a_{kk-1} = -\frac{p_{k-\frac{1}{2}}}{h_{k-1}} + \frac{\gamma_{k-\frac{1}{2}}h_{k-1}}{8},$$
(2.20)

$$a_{kk} = \frac{p_{k-\frac{1}{2}}}{h_{k-1}} + \frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{h_k} + \frac{3}{8} (\gamma_{k-\frac{1}{2}} h_{k-1} + \gamma_{k+\frac{1}{2}} h_k), \qquad (2.21)$$

$$a_{kk+1} = -\frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{h_k} + \frac{\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_k}{8}.$$
(2.22)

а последняя строка – две ненулевых компоненты

$$a_{nn-1} = -\frac{p_{n-\frac{1}{2}}}{h_{n-1}} + \frac{\gamma_{n-\frac{1}{2}}h_{n-1}}{8}, \qquad a_{nn} = \frac{p_{n-\frac{1}{2}}}{h_{n-1}} + \frac{3\gamma_{n-\frac{1}{2}}h_{n-1}}{8} + \beta.$$
(2.23)

Таким образом, в результате конечнообъемной аппроксимации краевой задачи (1.1), (1.3), (1.4) нами получен ее дискретный аналог в виде СЛАУ

$$AU=G \tag{2.24}$$

с симметричной трехдиагональной матрицей вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$
(2.25)

ненулевые компоненты которой определяются формулами (2.19)-(2.23). Компоненты же вектора правой части *G* конечнообъемной СЛАУ (2.24) полностью определяются правыми частями соответствующих уравнений системы (2.16)-(2.18).

Отметим, что краевое условие второго рода (1.3) дает вклад только в соответствующую компоненту правой части конечнообъемной СЛАУ (см. (2.16)), а краевое условие третьего рода (1.4) дает вклад и в компоненту матрицы СЛАУ, и в компоненту её правой части (см. (2.18) и (2.23)). Если же в граничном узле x_1 (или x_n) задано краевое условие первого рода (1.2), то значение искомой функции и в этом узле определено и поэтому нет необходимости составлять для соответствующего конечного объема $\tilde{\Omega}_1$ (или $\tilde{\Omega}_n$) интегробалансное соотношение. Вместо него в СЛАУ может быть вставлено уравнение $u_1=u_g$ (или $u_n = u_g$). Очевидно, что уравнение вида $u_1 = u_g$ (или $u_n = u_g$) нарушает симметричность матрицы (2.25) СЛАУ (2.24), так как ему в матрице А соответствует строка с единицей на диагонали и всеми нулевыми внедиагональными элементами. Однако не представляет никакого труда симметризовать матрицу конечнообъемной СЛАУ и при наличии в краевой задаче краевого условия первого рода. Для этого достаточно с помощью строк СЛАУ, описывающих первые краевые условия, исключить ненулевые компоненты матрицы А из столбцов с номерами, совпадающими с номерами узлов, в которых задано краевое условие первого рода. Так, при здании краевого условия первого рода в узле x₁ для исключения компоненты a_{21} из первого столбца второй строки достаточно вычесть из второго уравнения СЛАУ первое уравнение, умноженное на значение a_{21} . Учитывая, что после учета краевого условия первого рода, заданного в узле x_1 , первая строка матрицы А имеет единственный ненулевой элемент, стоящий на главной диагонали и равный единице, процедура исключения компоненты a_{21} будет состоять в вычитании из второй компоненты вектора правой части G величины $a_{21}u_{\sigma}$ и обнулении элемента a_{21} в матрице A. Таким образом, после учета краевого условия первого рода, заданного в узле x_1 , матрица A и вектор правой части G примут вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} u_g \\ g_2 - a_{21} u_g \\ g_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

В заключение данного пункта рассмотрим вопросы технологии сборки конечнообъемной СЛАУ. Возможны два подхода к формированию матрицы и

вектора правой части конечнообъемной СЛАУ. В первом подходе для каждого конечного объема записывается уравнение, полученное в результате аппроксимации на нем соответствующего интегробалансного соотношения – для одномерной эллиптической краевой задачи это уравнение вида (2.13), (2.14) или (2.15). Затем по этому уравнению определяются все компоненты одной строки матрицы СЛАУ в виде коэффициентов, на которые умножаются неизвестные *u_i*, а также соответствующая компонента вектора правой части в виде слагаемых этого уравнения, не содержащих в качестве сомножителей неизвестных u_i . Таким образом, строки конечнообъемной СЛАУ генерируются поочередно проходом по всем узлам сетки, причем каждая строка формируется сразу целиком (а не отдельными частями) в результате обработки одного интегробалансного соотношения для конечного объема, построенного вокруг соответствующего узла сетки. Поэтому такой подход получил название поузловой сборки матрицы и вектора правой части конечнообъемной СЛАУ. На первый взгляд этот подход представляется наиболее естественным и наглядным при реализации МКО. Однако при решении двумерных и трехмерных краевых задач он оказывается гораздо менее удобным по сравнению с другим подходом, называемым поэлементной (или поячеечной) сборкой СЛАУ.

Суть поэлементной (поячеечной) сборки матрицы и вектора правой части конечнообъемной СЛАУ состоит в следующем. Каждая ячейка дискретизации Ω_k расчетной области Ω имеет в качестве своих составных частей подобласти, являющиеся частями различных конечных объемов. Нетрудно выделить вклады от одной ячейки дискретизации в интегробалансные соотношения для тех конечных объемов, в которые входят ее составные части. Так, часть Ω'_k ячейки дискретизации Ω_k (см. рис. 1), являющаяся также частью конечного объема $\tilde{\Omega}_k$, дает вклад

$$-p\frac{du}{dx}\Big|_{x_{k+\frac{1}{2}}} + \int_{x_{k}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \gamma u \, dx = -p_{k+\frac{1}{2}}\frac{u_{k+1} - u_{k}}{h_{k}} + \frac{\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}}{8}(3u_{k} + u_{k+1})$$
(2.26)

в левую часть интегробалансного соотношения для конечного объема $\hat{\Omega}_k$ и вклад

$$\int_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} f \, dx = \frac{h_k}{8} \left(3f_k + f_{k+1} \right) \tag{2.27}$$

в его правую часть (см. соотношения (2.3), (2.6), (2.8), (2.10) и (2.12)), т.е. это вклады в k-е (в соответствии с номером конечного объема и узла сетки) уравнение конечнообъемной СЛАУ. Часть же Ω_k'' ячейки дискретизации Ω_k , являющаяся частью конечного объема $\tilde{\Omega}_{k+1}$, дает вклад

$$p\frac{du}{dx}\Big|_{x_{k+\frac{1}{2}}} + \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} \eta u \, dx = p_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1} - u_k}{h_k} + \frac{\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_k}{8} (u_k + 3u_{k+1})$$
(2.28)

в левую часть интегробалансного соотношения для конечного объема $\tilde{\Omega}_{k+1}$ и вклад

$$\int_{x_{k+1/2}}^{x_{k+1}} dx = \frac{h_k}{8} (f_k + 3f_{k+1})$$
(2.29)

в его правую часть, т.е. это вклады в (k+1)-е уравнение конечнообъемной СЛАУ.

Введем на ячейке дискретизации Ω_k <u>локальную нумерацию</u> узлов сетки $\hat{x}_1^k = x_k$, $\hat{x}_2^k = x_{k+1}$, т.е. левая вершина ячейки Ω_k получила локальный номер 1, а правая – локальный номер 2 (верхний индекс k у \hat{x}_1^k и \hat{x}_2^k – это номер рассматриваемой ячейки дискретизации). Обозначим в соответствии с локальной нумерацией узлов ячейки Ω_k значения неизвестных u_k и u_{k+1} в этих узлах \hat{u}_1^k и \hat{u}_2^k . Запишем вклады (2.26) и (2.28) в k-е и (k+1)-е уравнения конечнообъемной СЛАУ в виде

$$\begin{cases} -p_{k+\nu_{2}}\frac{u_{k+1}-u_{k}}{h_{k}} + \frac{\gamma_{k+\nu_{2}}h_{k}}{8}(3u_{k}+u_{k+1}) \\ p_{k+\nu_{2}}\frac{u_{k+1}-u_{k}}{h_{k}} + \frac{\gamma_{k+\nu_{2}}h_{k}}{8}(u_{k}+3u_{k+1}) \end{cases} = \begin{cases} \hat{a}_{11}^{k}\hat{u}_{1}^{k} + \hat{a}_{12}^{k}\hat{u}_{2}^{k} \\ \hat{a}_{21}^{k}\hat{u}_{1}^{k} + \hat{a}_{22}^{k}\hat{u}_{2}^{k} \end{cases} = \\ = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11}^{k} & \hat{a}_{12}^{k} \\ \hat{a}_{21}^{k} & \hat{a}_{22}^{k} \end{pmatrix} \end{cases}$$
(2.30)

т.е. вклады от ячейки Ω_k в левые части k-го и (k+1)-го уравнений конечнообъемной СЛАУ могут быть представлены в матричном виде $\hat{A}^k \hat{U}^k$, где \hat{A}^k – локальная матрица, а \hat{U}^k – локальный вектор неизвестных ячейки Ω_k :

$$\hat{A}^{k} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11}^{k} & \hat{a}_{12}^{k} \\ \hat{a}_{21}^{k} & \hat{a}_{22}^{k} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}^{k} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{1}^{k} \\ \hat{u}_{2}^{k} \end{pmatrix}.$$

Из (2.30) легко получить выражения для компонент локальной матрицы \hat{A}^k конечного объема Ω_k :

$$\hat{a}_{11}^{k} = \frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{h_{k}} + \frac{3\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}}{8}, \quad \hat{a}_{12}^{k} = -\frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{h_{k}} + \frac{\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}}{8},$$

$$\hat{a}_{21}^{k} = -\frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{h_{k}} + \frac{\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}}{8}, \quad \hat{a}_{22}^{k} = \frac{p_{k+\frac{1}{2}}}{h_{k}} + \frac{3\gamma_{k+\frac{1}{2}}h_{k}}{8}.$$
(2.31)

Процедура формирования элементов глобальной матрицы А конечнообъемной СЛАУ из элементов локальных матриц \hat{A}^k может быть реализована следующим образом. Сначала обнуляются все элементы глобальной матрицы А. Затем в цикле по ячейкам дискретизации Ω_k формируются локальные матрицы \hat{A}^k по формулам (2.31) и их элементы заносятся в глобальную матрицу по следующему правилу. Элемент \hat{a}^k_{ii} локальной матрицы \hat{A}^k должен быть добавлен к элементу \hat{a}_{IJ}^k глобальной матрицы A с номером строки I, соответствующим локальному номеру *i*, и номером столбца *J*, соответствующим локальному номеру *j*. То есть элемент \hat{a}_{11}^k должен быть добавлен к элементу a_{kk} , \hat{a}_{12}^k – к элементу a_{kk+1} , \hat{a}_{21}^k – к элементу a_{k+1k} и \hat{a}_{22}^k – к элементу a_{k+1k+1} . Нетрудно убедиться, что *k*-я строка глобальной матрицы *A* будет полностью сформирована после занесения в нее локальных матриц ячеек дискретизации Ω_k и Ω_{k+1} . Такая сборка матрицы A фактически соответствует формированию на конечном объеме $\tilde{\Omega}_k$ балансных соотношений посредством объединения вкладов в них от ячеек дискретизации Ω_k и Ω_{k+1} , из частей которых и был создан конечный объем $\widetilde{\Omega}_k$. После обработки всех ячеек Ω_k получим матрицу A конечнообъемной СЛАУ в виде

На заключительном этапе поячеечной сборки матрицы конечнообъемной СЛАУ необходимо добавить <u>вклады от краевых условий</u> – к соответствующему диагональному элементу матрицы *А* должен быть добавлен лишь коэффициент β из краевого условия третьего рода. Так, при задании краевого условия третье-

р из краевого условия грегене года (1.4) на правой границе расчетной области Ω поток $-\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_n}$ в баланс-

ном соотношении для конечного объема $\tilde{\Omega}_n$ заменяется величиной $\beta(u_n - u_\beta)$ – это означает, что от краевого условия третьего рода в элемент a_{nn} должен быть добавлен вклад β .

После прохода по всем ячейкам дискретизации и добавки вкладов от краевых условий мы получим матрицу A с элементами a_{ij} , определяемыми соотношениями (2.19)-(2.23).

Процесс формирования матрицы конечнообъемной СЛАУ проходом по ячейкам дискретизации и сборкой глобальной матрицы из локальных матриц ячеек Ω_k часто называют, по аналогии с МКЭ, поэлементной сборкой глобальной матрицы. Действительно, ячейка дискретизации Ω_k – это, как и в МКЭ, элемент сетки, и для него, как и в МКЭ, строится локальная (элементная) матрица, которая затем переносится в глобальную по соответствию локальных и глобальных номеров узлов рассматриваемого элемента сетки Ω_k .

Процедура поэлементной сборки вектора правой части конечнообъемной СЛАУ реализуется аналогично процедуре поэлементной сборки матрицы. Одновременно с обнулением компонент матрицы конечнообъемной СЛАУ обнуляются компоненты ее правой части. В процессе обхода ячеек дискретизации Ω_k одновременно с компонентами локальной матрицы (2.31) формируются компоненты локального вектора \hat{G}^k в виде вкладов в балансные соотношения от частей $\Omega'_k \subset \tilde{\Omega}_k$ и $\Omega''_k \subset \tilde{\Omega}_{k+1}$ ячейки дискретизации Ω_k (см. соотношения (2.27) и (2.29)):

$$\hat{G}^{k} = \begin{pmatrix} \hat{g}_{1}^{k} \\ \hat{g}_{2}^{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_{k}}{8} \left(3\hat{f}_{1}^{k} + \hat{f}_{2}^{k} \right) \\ \frac{h_{k}}{8} \left(\hat{f}_{1}^{k} + 3\hat{f}_{2}^{k} \right) \end{pmatrix}, \qquad (2.32)$$

где \hat{f}_1^k и \hat{f}_2^k – значения функции правой части f уравнения (1.1) в узлах \hat{x}_1^k и \hat{x}_2^k ячейки дискретизации Ω_k . Затем компоненты \hat{g}_1^k и \hat{g}_2^k локального вектора правой части \hat{G}^k заносятся в глобальный вектор правой части G конечнообъемной СЛАУ по соответствию локальной и глобальной нумерации узлов на обрабатываемом элементе сетки Ω_k , т.е.

$$G = \begin{pmatrix} \hat{g}_{1}^{1} \\ \hat{g}_{2}^{1} + \hat{g}_{1}^{2} \\ \hat{g}_{2}^{2} + \hat{g}_{1}^{3} \\ \vdots \\ \hat{g}_{2}^{n-2} + \hat{g}_{1}^{n-1} \\ \hat{g}_{2}^{n-1} \end{pmatrix} .$$
(2.33)

По окончании прохода по всем ячейкам Ω_k учитываются краевые условия второго и третьего рода (1.3) и (1.4). Эти условия дают вклад θ или βu_{β} в компоненту g_1 или g_n глобального вектора G. При наличии краевого условия первого рода (1.2) оно учитывается заменой первого или последнего уравнения полу-

ченной конечнообъемной СЛАУ уравнением вида $u_1 = u_g$ или $u_n = u_g$ с возможной последующей симметризацией матрицы конечнообъемной СЛАУ.

Для большинства практических задач объемный источник f поля u отличен от нуля только в некоторых подобластях расчетной области Ω , т.е. функция f из правой части уравнения (1.1) является, как правило, разрывной функцией. Технология поэлементной сборки вектора правой части конечнообъемной СЛАУ естественным образом учитывает такую ситуацию – если в узле x_k функция fразрывна, то на ячейке дискретизации Ω_{k-1} , в которой x_k является правой границей, в качестве \hat{f}_2^{k-1} должно быть взято значение $f(x_k-0)$ (т.е. значение f слева от x_k), а на ячейке Ω_k , в которой x_k является левой границей, в качестве \hat{f}_1^k должно быть взято значение $f(x_k+0)$ (т.е. значение f справа от x_k). При этом, естественно, все точки разрыва функции f, как и точки разрыва коэффициентов p и γ дифференциального уравнения (1.1), должны быть включены в конечнообъемную сетку в качестве ее узлов.

Вообще говоря, расчетную область Ω лучше представлять в виде отдельных подобластей, описывающих основные составные части моделируемого объекта. В каждой же из таких составных частей коэффициенты и правая часть дифференциального уравнения (1.1), как правило, однотипны (являются некоторыми константами или функциями определенного вида), что очень удобно для программной реализации МКО. При таком подходе каждая ячейка Ω_k конечнообъемной сетки может быть снабжена числом, обозначающим номер составной части исследуемого объекта, и значения коэффициентов р и у внутри ячейки дискретизации Ω_k и функции f на ее границе могут быть вычислены в соответствии с этим номером. При этом не составляет труда построить сетку дискретизации расчетной области Ω так, чтобы граничные точки отдельных частей моделируемого объекта были включены в эту сетку в качестве ее узлов. Для этого достаточно сначала включить в сетку все граничные точки отдельных частей исследуемого объекта, а затем сгенерировать все остальные узлы сетки между этими граничными точками с учетом требуемых размеров ячеек дискретизации Ω_b .

Обратим внимание на то, что в результате сборки глобального вектора правой части конечнообъемной СЛАУ по описанной выше технологии поэлементной сборки его компонента g_k для узла x_k , в котором функция f имеет разрыв, примет следующий вид (см. (2.32) и (2.33)):

$$g_{k} = \hat{g}_{2}^{k-1} + \hat{g}_{1}^{k} = \frac{h_{k-1}}{8} \left(\hat{f}_{1}^{k-1} + 3\hat{f}_{2}^{k-1} \right) + \frac{h_{k}}{8} \left(3\hat{f}_{1}^{k} + \hat{f}_{2}^{k} \right) =$$

$$= \frac{h_{k-1}}{8} \left(f(x_{k-1} + 0) + 3f(x_{k} - 0) \right) + \frac{h_{k}}{8} \left(3f(x_{k} + 0) + f(x_{k+1} - 0) \right) , \qquad (2.34)$$

который совпадает с правой частью соотношения (2.14) только при условии непрерывности f в узлах сетки. Очевидно, что соотношение (2.34) является более точным для разрывной f.

При реализации поузловой сборки вектора правой части G конечнообъемной СЛАУ в общем-то не представляет большого труда учесть возможную разрывность функции f в узлах сетки (в результате в правой части уравнения (2.14) будет получено выражение, полностью совпадающее с значением g_k из (2.34)), но при поэлементной сборке G сделать это проще и удобней.

Конечно, в одномерном случае технология поэлементной сборки матрицы и вектора правой части конечнообъемной СЛАУ не дает столь уж существенных преимуществ по сравнению с технологией поузловой сборки, хотя чуть большее удобство поэлементной сборки заметно даже здесь: при ее использовании все ячейки дискретизации Ω_k обрабатываются абсолютно одинаково, в то время как при поузловой сборке контрольные объемы $\tilde{\Omega}_k$ должны быть обработаны по-разному в зависимости от того, построены они около внутреннего или граничного узла сетки. При использовании технологии поэлементной сборки конечнообъемной СЛАУ удобней также учесть разрывность функции f в правой части уравнения (1.1). Указанные преимущества технологии поэлементной сборки становятся гораздо более весомыми при решении двумерных и трехмерных задач.

2.2. КОНЕЧНООБЪЕМНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Пусть требуется вычислить решение дифференциального уравнения (1.1) в двумерной области Ω , состоящей из прямоугольных фрагментов. В качестве примера такой области рассмотрим расчетную область Ω , структура которой показана на рис. 2. Эта область состоит из трех прямоугольных фрагментов – W_1 , W_2 и W_3 . В каждом из этих фрагментов заданы свои значения коэффициентов p, γ дифференциального уравнения (1.1) и его правой части f, которые могут быть либо константами, либо некоторыми функциями координат, а в случае нелинейной эллиптической задачи – и функциями решения u. Будем также считать, что на границе $S_1=\{x=2; 1\leq y\leq 2\}\cup\{2\leq x\leq 6; y=2\}$ задано краевое условие первого рода (1.2), на границе $S_2=\{1\leq x\leq 2; y=1\}\cup\{x=6; 2\leq y\leq 5\}$ – краевое условие второго рода (1.3), на границе $S_3=\{x=1; 1\leq y\leq 5\}\cup\{1\leq x\leq 6; y=5\}$ – краевое условие третьего рода (1.4).

Возможны различные подходы к описанию расчетной области, состоящей из прямоугольных подобластей W_1, W_2, \ldots . Один из таких подходов заключается в следующем. Сначала формируются массивы X и Y значений всех вертикальных и горизонтальных границ подобластей W_l . Например, для показанной на рис. 2 расчетной области $\Omega = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ массивы X и Y имеют следующий вид: $X = \{1., 2., 6.\}$ и $Y = \{1., 2., 4., 5.\}$. Каждая из подобластей W_l представляется набором из пяти целых чисел, первое из которых означает номер подобласти, второе – номер элемента в массиве X, определяющего x-координату левой границы подобласти W_l , третье – номер элемента в массиве X, определяющего x-

координату правой границы W_l , четвертое – номер элемента в массиве Y, определяющего y-координату нижней границы W_l , пятое – номер элемента в массиве Y, определяющего y-координату верхней границы W_l . Таким образом, полное описание расчетной области, состоящей из набора прямоугольников с различными значениями параметров дифференциального уравнения (1.1) в них, может быть представлено в файле следующей структуры: первое число N (целое) означает длину массива X; следующие N вещественных чисел – элементы массива X; далее число M (целое) – длина массива Y; следующие M вещественных чисел – элементы массива Y; затем число L (целое) – количество подобластей W_1 , W_2 , ..., из которых состоит расчетная область Ω ; далее L наборов по 5 целых чисел, описывающих все подобласти W_1 , W_2 , При использовании такого подхода расчетная область, представленная на рис. 2, может быть описана следующим образом:



Рис. 2 Структура расчетной области Ω

Конечно, при описании границ отдельных подобластей вместо номеров элементов массивов X и Y можно указывать их значения. Но такое представле-

ние исходных данных может быть источником ошибок при интерпретации этих данных в ситуациях, когда границы подобластей задаются дробными числами, которые могут округляться. Действительно, если при задании вертикальной (или горизонтальной) границы двух смежных подобластей расчетной области одно и то же число (например, π) округлить по-разному (например, при описании одной подобласти задать координату границы равной 3.14, а при описании второй подобласти – равной 3.1415), то при интерпретации таких данных в обрабатывающей геометрию расчетной области программе эти подобласти должны быть разведены по x (или по y) – в результате в расчетной области могут появиться дыры, искажающие ее геометрию. Если не предусмотреть специальных мер контроля таких ситуаций, то расчет по заданным таким образом данным может приводить к серьезному искажению результата. Описание же границ подобластей через номера элементов массивов X и Y освобождает нас от такого рода проблем.

Заметим, что номера подобластей в рассмотренном подходе к представлению расчетной области нужны фактически для того, чтобы вычислить значения коэффициентов p и γ дифференциального уравнения (1.1) и функции его правой части f – в каждой из подобластей W_k параметры p, γ и f могут быть либо различными константами, либо функциями координат или решения. Поэтому если в двух геометрически разнесенных подобластях расчетной области параметры p, γ и f одинаковы (в том смысле, что в каждой из этих подобластей они равны одним и тем же константам $p=c_1$, $\gamma=c_2$ и $f=c_3$ или их значения могут быть вычислены по одним и тем же формулам), то у этих подобластей удобно задать один и тот же номер. Но при этом каждая из этих подобластей должна быть включена в описание расчетной области. Например, расчетная область, показанная на рис. 3, будет описана следующим образом:

4						
1.	2.	4		6.		
6						
1.	2.	2	.2	2.8	3.	3.5
4						
1	1	2	1	6		
2	2	4	1	2		
3	2	3	3	4		
2	2	4	5	6		

Как видно из приведенного выше описания расчетной области Ω , две из ее четырех подобластей имеют один и тот же номер, равный двум. Очевидно, что при таком подходе под номером подобласти фактически понимается <u>номер</u> <u>формул</u>, определяющих параметры *p*, γ и *f* дифференциального уравнения (1.1) в рассматриваемой подобласти.

Аналогичный подход может быть применен для описания границ расчетной области с заданными на них краевыми условиями первого, второго или третьего рода. Каждый фрагмент границ S_1 , S_2 и S_3 может быть описан шестью целыми числами:

- тип краевого условия (1 означает принадлежность рассматриваемого фрагмента границе S₁, 2 – границе S₂, 3 – границе S₃);
- номер границы (т.е. номер формул, задающих параметры краевого условия на рассматриваемом фрагменте границы);
- номер элемента массива *X*, с которого рассматриваемый фрагмент границы начинается по оси *x*;
- номер элемента массива X, которым рассматриваемый фрагмент границы заканчивается по оси x;
- номер элемента массива *Y*, с которого рассматриваемый фрагмент границы начинается по оси *y*;
- номер элемента массива *Y*, которым рассматриваемый фрагмент границы заканчивается по оси *y*.

При использовании такого подхода границы расчетной области, представленой на рис. 2, могут быть описаны следующим образом (содержимое массивов *X* и *Y* то же самое, что и в описании самой расчетной области):

1

1

3

3

2

2

2



Рис. 3. Пример расчетной области, содержащей две подобласти с одинаковыми значениями в них параметров дифференциального уравнения (1.1) – эти подобласти обозначены через W_2

В этом описании предполагается, что параметры краевых условий первого и третьего рода одинаковы на всех фрагментах границ S_1 и S_3 , а параметры второго краевого условия на горизонтальном фрагменте границы S_2 и нижнем фрагменте ее вертикального участка отличаются от параметра второго краевого условия на верхнем фрагменте вертикального участка S_2 .

Очевидно, что если параметры в краевых условиях (1.2)-(1.4) являются константами, то вместо номера границы можно задавать значения этих параметров. Однако если в решаемой задаче есть параметры краевых условий в виде некоторых функций, то задать их по номеру границы гораздо проще. Наиболее удобным представляется комбинирование двух подходов: если номер границы положителен, то он задает номер формулы, по которой должны вычисляться параметры краевого условия, если же отрицателен, то значения параметров краевого условия задаются в следующих за этим номером двух вещественных числах (двух из-за того, что краевые условия третьего рода имеют два параметра). Естественно, под описание каждого фрагмента границы в этом случае должно быть зарезервировано восемь чисел (т.е. после номера границы должно быть добавлено два вещественных числа). Такие же модификации возможны и при описании расчетной области – после номера подобласти можно зарезервировать место под три вещественных числа, которые в случае отрицательного номера подобласти интерпретируются как значения параметров *p*, у и f.

Теперь перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с построением дискретного аналога краевой задачи (1.1)-(1.4) на основе ее конечнообъемной аппроксимации. Разбиение расчетной области Ω на прямоугольные ячейки Ω_{ij} будем проводить следующим образом. Поставим на оси x узлы $x_1, x_2, ..., x_n$ таким образом, чтобы x-координаты всех вертикальных границ подобластей W_l (т.е. элементы массива X) были включены в набор узлов $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Аналогично должны быть поставлены узлы $y_1, y_2, ..., y_m$ по оси y – в этот набор узлов должны быть включены все горизонтальные границы подобластей W_l (т.е. элементы массива Y). В принципе, оптимальное размещение узлов по осям x и y зависит от поведения решения u: в тех подобластях, где производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ изме-

няются наиболее резко, необходимо более плотно расставлять узлы x_i и y_j , уменьшая шаги $h_i^x = x_{i+1} - x_i$ и $h_j^y = x_{j+1} - x_j$; при малых изменениях производ-

ных $\frac{\partial u}{\partial x}$ или $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответствующие шаги h_i^x или h_j^y могут быть существенно

увеличены. Если же априорной информации о поведении решения u в расчетной области Ω нет, то узлы x_i и y_j расставляются примерно равномерно (но с учетом обязательного попадания их на границы подобластей W_l).

В результате этих действий расчетная область Ω может быть представлена в виде объединения ячеек дискретизации $\Omega_{ij}=(x_i, x_{i+1})\times(y_j, y_{j+1})$, и параметры p, γ и f дифференциального уравнения (1.1) на каждой ячейке дискретизации Ω_{ij} могут быть вычислены по признаку принадлежности этой ячейки одной из подобластей W_l . Рассмотрим структуру конечных объемов Ω_{ij} , на которых мы будем строить и аппроксимировать интегробалансные соотношения. Конечный объем $\tilde{\Omega}_{ij}$, построенный вокруг узла $\{x_i, y_j\}$, представляет собой пересечение прямоугольника $\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \times \left(\frac{y_{j-1} + y_j}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)$ с расчетной областью Ω . То

есть для внутреннего узла $\{x_i, y_j\}$ конечный объем $\widetilde{\Omega}_{ij}$ фактически является

объединением четырех четвертинок ячеек дискретизации $\Omega_{i-1i-1}, \Omega_{ii-1}, \Omega_{i-1i}, \Omega_{i-1i},$ Ω_{ij} . Обозначим отдельные четвертинки ячейки дискретизации Ω_{*ii*} так, как это показано на рис. 4: левую нижнюю четвертинку ячейки Ω_{ii} обозначим че-правую нижнюю – $\Omega_{ij}^{\Pi H}$, правую верхнюю – через $\Omega_{ii}^{\text{пв}}$. Тогда для внутреннего узла $\{x_i, y_j\}$ конечный объем $\widetilde{\Omega}_{ij}$ может быть записан виде $\widetilde{\Omega}_{ij} = \Omega^{\mathrm{TB}}_{i-1j-1} \bigcup \Omega^{\mathrm{TB}}_{ij-1} \bigcup \Omega^{\mathrm{TH}}_{i-1j} \bigcup \Omega^{\mathrm{TH}}_{ij}.$ Ha рис. 5 показан вид такого конечного объема. Конечный объем для граничных точек может состоять из трех, двух или одной четвертинок ячеек дискретизации. На рис. 6-8 приведены примеры таких конечных объемов.



Рис. 4. Разбиение ячейки дискретизации Ω_{ij} на 4 четвертинки $\Omega_{ij}^{\Pi H}$, $\Omega_{ij}^{\Pi H}$, $\Omega_{ij}^{\Pi B}$, $\Omega_{ij}^{\Pi B}$

Пронумеруем узлы $\{x_i, y_j\}$ наброшенной на расчетную область Ω прямоугольной сетки следующим образом. Сначала пронумеруем все узлы с координатой $y=y_1$ по возрастанию координаты x независимо от того, попали ли эти узлы в расчетную область Ω или нет. Затем пронумеруем все узлы с координатой $y=y_2$ по возрастанию координаты x и т.д. В результате узел $\{x_i, y_j\}$ получит номер

$$k=i+(j-1)n,$$
 (2.35)

где n – число узлов в сетке по оси x. В соответствии с введенной нумерацией узлов обозначим через u_k значение искомого решения u в узле $\{x_i, y_j\}$, а через $\tilde{\Omega}_k$ – контрольный объем $\tilde{\Omega}_{ij}$. В дальнейшем для конечных объемов вместо обозначения с двумя индексами $\tilde{\Omega}_{ij}$ мы всегда будем использовать обозначение с одним индексом $\tilde{\Omega}_k$ (где k соответствует номеру узла $\{x_i, y_j\}$ и связан с ин-

дексами i и j соотношением (2.35)); в то же время для прямоугольных ячеек дискретизации мы оставим двухиндексное обозначение Ω_{ij} .



Рис. 5. Вид построенного вокруг внутреннего узла $\{x_i, y_j\}$ конечного объема $\widetilde{\Omega}_{ij}$, состоящего из четвертинок четырех ячеек дискретизации Ω_{i-1j-1} , Ω_{ij-1} , Ω_{i-1j} и Ω_{ij}



Рис. 6. Вид построенного вокруг граничного узла $\{x_i, y_j\}$ конечного объема $\widetilde{\Omega}_{ij}$, состоящего из четвертинок трех ячеек дискретизации Ω_{i-1j-1} , Ω_{i-1j} и Ω_{ij}



Рис. 7. Вид построенного вокруг граничного узла $\{x_i, y_j\}$ конечного объема $\widetilde{\Omega}_{ij}$, состоящего из четвертинок двух ячеек дискретизации Ω_{i-1j} и Ω_{ij}



Рис. 8 Вид построенного вокруг граничного узла $\{x_i, y_j\}$ конечного объема $\widetilde{\Omega}_{ij}$, состоящего из четвертинки одной ячейки дискретизации Ω_{i-1j}

Для построения дискретного аналога краевой задачи (1.1)-(1.4) проинтегрируем уравнение (1.1) по каждому непустому конечному объему $\tilde{\Omega}_k$. Напомним, что под конечным объемом, построенным вокруг узла сетки $\{x_i, y_j\}$, нами понималось пересечение соответствующих четвертинок ячеек дискретизации $\Omega_{i-1j-1}, \Omega_{ij-1}, \Omega_{i-1j}$ и Ω_{ij} с расчетной областью $\Omega = \bigcup_l W_l$. Очевидно, что для узлов сетки $\{x_i, y_j\}$, не попавших в расчетную область (с учетом ее внешней границы), $\tilde{\Omega}_k = \emptyset$. Не имеет также смысла строить конечные объемы вокруг узлов, лежащих на границе S_1 с заданным там значением функции u_g . Для этих узлов должны быть сформированы уравнения вида $u_k = u_g$. Поэтому для узлов, принадлежащих S_1 , также полагаем $\tilde{\Omega}_k = \emptyset$. В результате интегрирования уравнений вида

$$-\int_{\widetilde{\Omega}_{k}} div(p \, grad \, u) d\Omega + \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} \gamma u \, d\Omega = \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} f \, d\Omega, \quad k \in K,$$
(2.36)

где K – множество номеров всех узлов сетки, попавших в расчетную область Ω и не принадлежащих границе S_1 .

Преобразуем левую часть соотношения (2.36), воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\widetilde{\Omega}_k} div(p \, grad \, u) d\Omega = \int_{\widetilde{\Gamma}_k} p \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

где $\tilde{\Gamma}_k$ – граница конечного объема $\tilde{\Omega}_k$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная искомой функции u по внешней нормали к границе $\tilde{\Gamma}_k$. В результате для узлов сетки, попавших в расчетную область Ω , получим уравнения вида

$$-\int_{\widetilde{\Gamma}_{k}} p \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} \gamma u \, d\Omega = \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} f \, d\Omega, \quad k \in K.$$
(2.37)

Следующий шаг построения дискретного аналога краевой задачи (1.1)-(1.4) состоит в аппроксимации входящих в интегральные соотношения (2.37) значений искомой функции u и ее производной по нормали к границе $\tilde{\Gamma}_k$, лежащей внутри расчетной области Ω . Рассмотрим простейшие аппроксимации u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на $\tilde{\Omega}_k$ и $\tilde{\Gamma}_k$. При вычислении объемного интеграла $\int_{\tilde{\Omega}_k} \gamma u \, d\Omega$ (а в двумер-

ном случае объемной считается любая часть двумерной области Ω , любая же граница Γ в Ω считается частью поверхности) будем считать, что значение

функции *и* на всем конечном объеме $\tilde{\Omega}_k$ равно ее значению в соответствующем узле сетки, т.е. $u=u_k$ на $\tilde{\Omega}_k$. При вычислении же поверхностного интеграла от $p \frac{\partial u}{\partial n}$ по левой вертикальной границе конечного объема $\tilde{\Omega}_k$ будем считать, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ постоянна на этой границе и аппроксимируется конечно-разностным соотношением $(u_{k-1}-u_k)/h_{i-1}^x$, где $h_{i-1}^x = x_i - x_{i-1}$ – шаг сетки по оси *x*; при вычислении поверхностного интеграла от $\frac{\partial u}{\partial n}$ по правой вертикальной границе и аппроксимируется конечно-разностным соотнечного объема $\tilde{\Omega}_k$ будем также считать, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ постоянна на этой границе конечного объема $\tilde{\Omega}_k$ будем также считать, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ постоянна на этой границе конечного объема $\tilde{\Omega}_k$ будем также считать, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ постоянна на этой границе и аппроксимируется конечно-разностным соотношением $(u_{k+1}-u_k)/h_i^x$. Аналогично для горизонтальных границ конечного объема $\tilde{\Omega}_k$: на нижней границе $\frac{\partial u}{\partial n}$ постоянна и аппроксимируется конечно-разностным соотношением $(u_{k-n}-u_k)/h_{i-1}^y$ (где $h_{j-1}^y=y_j-y_{j-1}$, n – число узлов в сетке по оси *x*); и на верхней горизонтальной границе $\frac{\partial u}{\partial n}$ также постоянна и аппроксимируется конечно-разностным соотношением нечно-разностным соотношением $(u_{k+n}-u_k)/h_i^y$.

Если использовать технологию поузловой сборки конечнообъемной СЛАУ, то для замены интегробалансного соотношения (2.37) его дискретным аналогом необходимо определить, какие из частей границы $\tilde{\Gamma}_k$ конечного объема $\tilde{\Omega}_k$ лежат внутри расчетной области Ω , а какие являются частями внешних границ Ω. Необходимо также определить, каким именно подобластям расчетной области Ω принадлежат отдельные части конечного объема $\widetilde{\Omega}_k$ (чтобы иметь возможность вычислить значения параметров *p*, *γ* и *f*) и каким внешним границам расчетной области Ω принадлежат части границ $\widetilde{\Gamma}_k$ конечного объема $ilde{\Omega}_k$, не лежащие внутри Ω (чтобы иметь возможность определить тип и параметры соответствующего краевого условия). Кроме того, конечные объемы $\widetilde{\Omega}_k$ для граничных узлов могут состоять из различного числа четвертинок ячеек дискретизации (рис. 6–8), а сами четвертинки могут быть по-разному расположены по отношению друг к другу (например, кроме конфигурации из трех четвертинок, показанной на рис. 6, возможны также конфигурации, в которых две четвертинки ячеек дискретизации лежат слева и одна четвертинка – справа снизу, или одна четвертинка слева снизу и две четвертинки справа, или одна четвертинка слева сверху и две четвертинки справа). Поэтому можно сделать вывод о том, что для определения структуры конечного объема $\widetilde{\Omega}_k$ и его границы $\tilde{\Gamma}_k$ необходим довольно сложный логический анализ и в результате

трудоемкость получения полного дискретного аналога системы интегральных уравнений (2.37) становится довольно большой как с точки зрения логики программирования, так и по суммарным вычислительным затратам на обработку одного узла сетки. Мы же будем использовать для построения дискретного аналога системы интегробалансных соотношений (2.37) другой подход, основанный на поэлементной сборке конечнообъемной СЛАУ.

Рассмотрим следующую процедуру генерации конечнообъемной СЛАУ. В самом внешнем цикле организуется проход по подобластям W_l расчетной области Ω. При обработке одной подобласти организуется проход по ячейкам дискретизации $\Omega_{ij} \subset W_l$, в котором формируются и заносятся в матрицу и вектор правой части конечнообъемной СЛАУ вклады от одной ячейки дискретизации в интегробалансные соотношения для узлов, являющихся вершинами этой ячейки. Так, при обработке ячейки дискретизации Ω_{ii} могут быть получены вклады от нее в интегробалансное соотношение для конечного объема Ω_k (от четвертинки $\Omega_{ii}^{\text{лн}}$, см. рис.4), в интегробалансное соотношение для конечного объема $ilde{\Omega}_{k+1}$ (от четвертинки $\Omega_{ij}^{ extsf{nh}}$), в интегробалансное соотношение для конечного объема $\widetilde{\Omega}_{k+n}$ (от четвертинки $\Omega_{ij}^{\text{лв}}$) и в интегробалансное соотношение для конечного объема $ilde{\Omega}_{k+n+1}$ (от четвертинки $\Omega_{ij}^{\text{пв}}$). Нетрудно убедиться, что после завершения прохода по всем ячейкам дискретизации всех подобластей W_l расчетной области Ω мы получим СЛАУ, аппроксимирующую систему интегральных уравнений (2.37) без учета вкладов от интегралов по соответствующим частям поверхностей S₂ и S₃ (с заданными на них краевыми условиями (1.3)-(1.4)) и включающую в себя некоторые не нужные нам уравнения, сформированные для узлов с краевыми условиями первого рода. Действительно, для конечного объема, изображенного на рис. 5, соответствующее ему уравнение в конечнообъемной СЛАУ будет полностью сформировано после того, как будут обработаны ячейки дискретизации $\Omega_{i-1i-1}, \Omega_{i-1i}, \Omega_{ij-1}, \Omega_{ij}$, причем порядок обработки этих ячеек совершенно не важен. Для конечных объемов, изображенных на рис. 6-8, после обработки всех окружающих узел $\{x_i, y_i\}$ ячеек дискретизации в соответствующих конечнообъемных уравнениях будут учтены все объемные интегралы и интегралы по тем частям границ $\widetilde{\Gamma}_k$, которые лежат внутри расчетной области Ω (на рис. 6-8 эти части границ изображены тонкими штриховыми линиями). При этом такое же уравнение будет сформировано и в том случае, когда узел $\{x_i, y_i\}$ лежит на границе S_1 . Поэтому для завершения формирования конечнообъемной СЛАУ необходимо выполнить проход по всем внешним границам Ω с краевыми условиями второго и третьего рода и занести вклады от них в соответствующие уравнения конечнообъемной СЛАУ, а затем вместо уравнений, сформированных для лежащих на границе S₁ узлов, занести в конечнообъемную СЛАУ уравнения вида $u_k = u_g$. На заключительном этапе следует добавить фиктивные уравнения для узлов сетки, не лежащих в расчетной области (это могут быть уравнения вида $u_k=0$), и в случае необходимости

можно провести симметризацию матрицы СЛАУ (если симметричность матрицы СЛАУ была нарушена в результате учета краевых условий первого рода).

Рассмотрим более подробно все основные этапы реализации описанной выше процедуры поэлементной сборки конечнообъемной СЛАУ.

Первый этап состоит в вычислении вкладов от отдельных четвертинок ячейки дискретизации Ω_{ij} в соответствующие интегробалансные соотношения для конечных объемов, построенных вокруг вершин этой ячейки дискретизации. При принятой нами системе нумерации узлов сетки (см. соотношение (2.35)) вершина $\{x_i, y_j\}$ имеет номер k, вершина $\{x_{i+1}, y_j\}$ – номер k+1, вершина $\{x_i, y_{j+1}\}$ – номер k+n, вершина $\{x_{i+1}, y_{j+1}\}$ – номер k+n+1. Поэтому четвертинка Ω_{ij}^{nH} (см. рис. 4) является частью конечного объема $\tilde{\Omega}_k$ (построенного вокруг вершины $\{x_i, y_j\}$ с номером k), четвертинка Ω_{ij}^{nH} – частью конечного объема $\tilde{\Omega}_{k+n}$, четвертинка Ω_{ij}^{nB} – частью конечного объема $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$.

Для удобства вычисления вкладов в конечные объемы $\tilde{\Omega}_k$, $\tilde{\Omega}_{k+1}$, $\tilde{\Omega}_{k+n}$ и $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$ от ячейки дискретизации Ω_{ij} введем на Ω_{ij} локальную нумерацию ее вершин – эта нумерация представлена на рис. 10.



Рис. 9. Вид ячейки дискретизации Ω_{ii} с глобальной нумерацией ее вершин

В соответствии с локальной нумерацией вершин ячейки Ω_{ij} обозначим значения u_k искомой функции u в узле с глобальным номером k через \hat{u}_1 , значение u_{k+1} – через \hat{u}_2 , значение u_{k+n} – через \hat{u}_3 , значение u_{k+n+1} – через \hat{u}_4 , а также обозначим через Γ_{12} границу между четвертинками Ω_{ij}^{nH} и Ω_{ij}^{nH} (фактически это часть границы между конечными объемами $\tilde{\Omega}_k$ и $\tilde{\Omega}_{k+1}$), через Γ_{13} – границу

между четвертинками $\Omega_{ij}^{\text{лн}}$ и $\Omega_{ij}^{\text{лв}}$, через Γ_{24} – границу между четвертинками $\Omega_{ij}^{\text{пн}}$ и $\Omega_{ij}^{\text{пв}}$, через Γ_{34} – границу между четвертинками $\Omega_{ij}^{\text{лв}}$ и $\Omega_{ij}^{\text{пв}}$ (см. рис. 10). Тогда интеграл по границе Γ_{12} от производной *и* по внешней по отношению к четвертинке $\Omega_{ij}^{\text{лн}}$ (и конечному объему $\tilde{\Omega}_k$) нормали к Γ_{12} может быть аппроксимирован соотношением

$$\int_{\Gamma_{12}} p \frac{\partial u}{\partial n} dS \approx \overline{p} \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{h_x} \frac{h_y}{2}, \quad (2.38)$$

Рис. 10. Вид ячейки дискретизации Ω_{ij} с локальной нумерацией ее вершин и границ между входящими в Ω_{ij} конечными объемами.

в котором производная по нормали $\frac{\partial u}{\partial n}$ на всей границе Γ_{12} аппрокси-

мирована конечно-разностным соотношением $(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)/h_x$, а \overline{p} – некоторое осредненное значение параметра p на ячейке Ω_{ij} , h_x и h_y – размеры Ω_{ij} по осям xи y. Аналогично может быть аппроксимирован интеграл по границе Γ_{13} от производной по внешней по отношению к той же четвертинке $\Omega_{ij}^{\text{лн}}$ (и конечному объему $\tilde{\Omega}_k$) нормали к Γ_{13} :

$$\int_{\Gamma_{13}} p \frac{\partial u}{\partial n} dS \approx \overline{p} \frac{\hat{u}_3 - \hat{u}_1}{h_y} \frac{h_x}{2},$$
(2.39)

а также объемные интегралы

$$\int_{\Omega_{ij}^{3H}} \gamma u \, d\Omega \approx \overline{\gamma} u_1 \frac{h_x h_y}{4},\tag{2.40}$$

$$\int_{\Omega_{ij}^{n\mathrm{H}}} f d\Omega \approx \bar{f} \frac{h_x h_y}{4}, \qquad (2.41)$$

в которых функция *u* заменена своим значением в узле $\{x_i, y_j\}$, а $\overline{\gamma}$ и \overline{f} – некоторые осредненные по ячейке Ω_{ij} значения параметров γ и f. Из соотношений

(2.38) - (2.40) могут быть получены вклады от ячейки дискретизации Ω_{ij} в левую часть интегробалансного соотношения (2.37) для конечного объема $\tilde{\Omega}_k$:

$$-\overline{p}\frac{\hat{u}_{2}-\hat{u}_{1}}{h_{x}}\frac{h_{y}}{2}-\overline{p}\frac{\hat{u}_{3}-\hat{u}_{1}}{h_{y}}\frac{h_{x}}{2}+\overline{\gamma}\hat{u}_{1}\frac{h_{x}h_{y}}{4},$$
(2.42)

а правая часть соотношения (2.41) определяет вклад от Ω_{ij} в правую часть соотношения (2.37) для конечного объема $\tilde{\Omega}_k$.

Аналогично могут быть получены вклады от ячейки дискретизации Ω_{ij} в левую часть интегробалансного соотношения для конечного объема $\tilde{\Omega}_{k+1}$ (т.е. вклады от четвертинок $\Omega_{ij}^{\Pi H}$):

$$-\overline{p}\frac{\hat{u}_{1}-\hat{u}_{2}}{h_{x}}\frac{h_{y}}{2}-\overline{p}\frac{\hat{u}_{4}-\hat{u}_{2}}{h_{y}}\frac{h_{x}}{2}+\overline{\gamma}\hat{u}_{2}\frac{h_{x}h_{y}}{4},$$
(2.43)

а также вклады от Ω_{ij} в левые части интегробалансных соотношений для конечных объемов $\tilde{\Omega}_{k+n}$ и $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$:

$$-\overline{p}\frac{\hat{u}_{4}-\hat{u}_{3}}{h_{x}}\frac{h_{y}}{2}-\overline{p}\frac{\hat{u}_{1}-\hat{u}_{3}}{h_{y}}\frac{h_{x}}{2}+\overline{\gamma}\hat{u}_{3}\frac{h_{x}h_{y}}{4},$$
(2.44)

$$-\overline{p}\frac{\hat{u}_{3}-\hat{u}_{4}}{h_{x}}\frac{h_{y}}{2}-\overline{p}\frac{\hat{u}_{2}-\hat{u}_{4}}{h_{y}}\frac{h_{x}}{2}+\overline{\gamma}\hat{u}_{4}\frac{h_{x}h_{y}}{4}.$$
(2.45)

Вклады же в правые части интегробалансных соотношений для всех четырех конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$, $\tilde{\Omega}_{k+1}$, $\tilde{\Omega}_{k+n}$ и $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$ от соответствующих четвертинок $\Omega_{ij}^{\text{лн}}$, $\Omega_{ij}^{\text{пн}}$, $\Omega_{ij}^{\text{пв}}$ и $\Omega_{ij}^{\text{пв}}$ ячейки дискретизации Ω_{ij} при принятой аппроксимации функции f на ячейке Ω_{ij} (т.е. при замене ее осредненным по Ω_{ij} значением \bar{f}) одинаковы и определяются правой частью соотношения (2.41).

Будем считать, что в локальной нумерации конечный объем $\tilde{\Omega}_k$ (как и узел $\{x_i, y_j\}$, вокруг которого он построен) имеет номер 1, конечный объем $\tilde{\Omega}_{k+1}$ – номер 2, конечный объем $\tilde{\Omega}_{k+n}$ – номер 3 и конечный объем $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$ – номер 4. С учетом (2.42)-(2.45) представим вклады от ячейки Ω_{ij} в левые части интегробалансных соотношений для конечных объемов, построенных вокруг вершин этой ячейки, в виде произведения локальной матрицы \hat{A} на локальный вектор неизвестных \hat{U} , где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} & \hat{a}_{14} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \hat{a}_{24} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} & \hat{a}_{34} \\ \hat{a}_{41} & \hat{a}_{42} & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{pmatrix}, \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix}.$$
(2.46)

То есть соотношение (2.42) фактически будет первой строкой вектора $\hat{A} \cdot \hat{U}$, соотношение (2.43) – его второй строкой, соотношение (2.44) – третьей, а соотношение (2.45) – четвертой строкой (в соответствии с локальными номерами тех конечных объемов, в интегробалансные соотношения которых необходимо занести полученные вклады от ячейки Ω_{ij}). Преобразуем соотношение (2.42) к форме

$$\hat{a}_{11}\hat{u}_1 + \hat{a}_{12}\hat{u}_2 + \hat{a}_{13}\hat{u}_3 + \hat{a}_{14}\hat{u}_4. \tag{2.47}$$

Для этого перегруппируем его члены

$$\hat{a}_{11} = \frac{\overline{p}h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p}h_x}{2h_y} + \overline{\gamma}\frac{h_xh_y}{4}; \quad \hat{a}_{12} = -\frac{\overline{p}h_y}{2h_x}; \quad \hat{a}_{13} = -\frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{14} = 0.$$
(2.48)

Сопоставляя (2.48) с (2.47), получим выражения для компонент первой строки локальной матрицы \hat{A}

$$\hat{a}_{11} = \frac{\overline{p}\,h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p}\,h_x}{2h_y} + \overline{\gamma}\frac{h_xh_y}{4}; \quad \hat{a}_{12} = -\frac{\overline{p}\,h_y}{2h_x}; \quad \hat{a}_{13} = -\frac{\overline{p}\,h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{14} = 0.$$
(2.49)

Аналогично из соотношений (2.43) – (2.45) могут быть получены компоненты остальных трех строк локальной матрицы \hat{A} :

$$\hat{a}_{21} = -\frac{\overline{p}h_y}{2h_x}; \quad \hat{a}_{22} = \frac{\overline{p}h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p}h_x}{2h_y} + \overline{\gamma}\frac{h_xh_y}{4}; \quad \hat{a}_{23} = 0; \quad \hat{a}_{24} = -\frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad (2.50)$$

$$\hat{a}_{31} = -\frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{32} = 0; \quad \hat{a}_{33} = \frac{\overline{p}h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p}h_x}{2h_y} + \overline{\gamma}\frac{h_xh_y}{4}; \quad \hat{a}_{34} = -\frac{\overline{p}h_y}{2h_x}; \quad (2.51)$$

$$\hat{a}_{41} = 0; \quad \hat{a}_{42} = -\frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{43} = -\frac{\overline{p}h_y}{2h_x}; \quad \hat{a}_{44} = \frac{\overline{p}h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p}h_x}{2h_y} + \overline{\gamma}\frac{h_xh_y}{4}.$$
(2.52)

Компонентами локального вектора правой части \hat{G} являются вклады в интегробалансные соотношения для конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$, $\tilde{\Omega}_{k+1}$ $\tilde{\Omega}_{k+n}$ и $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$ от соответствующих четвертинок ячейки Ω_{ii}

$$\hat{g}_1 = \int_{\Omega_{ij}^{\Pi H}} f d\Omega; \quad \hat{g}_2 = \int_{\Omega_{ij}^{\Pi H}} f d\Omega; \quad \hat{g}_3 = \int_{\Omega_{ij}^{\Pi B}} f d\Omega; \quad \hat{g}_4 = \int_{\Omega_{ij}^{\Pi H}} f d\Omega. \quad (2.53)$$

При принятой нами аппроксимации функции f на ячейке Ω_{ij} все интегралы (2.53) одинаковы и совпадают с правой частью соотношения (2.41):

$$\hat{g}_1 = \hat{g}_2 = \hat{g}_3 = \hat{g}_4 = \hat{f} \cdot \frac{h_x h_y}{4} .$$
(2.54)

Соотношения (2.49)-(2.52) и (2.54) полностью определяют вклады от ячейки дискретизации Ω_{ii} в соответствующие интегробалансные соотношения. При этом в соответствии с принятой локальной нумерацией неизвестных и конечных объемов на ячейке дискретизации Ω_{ii} компонента \hat{a}_{11} локальной матрицы \hat{A} должна быть добавлена к компоненте a_{kk} глобальной матрицы \hat{A} , компонента \hat{a}_{12} – к компоненте a_{kk+1} , \hat{a}_{13} – к a_{kk+n} , \hat{a}_{14} – к a_{kk+n+1} , \hat{a}_{21} – к a_{k+1k} и т.д. То есть первый индекс и у компонент локальной матрицы \hat{A} , и у компонент глобальной матрицы А означает номер конечного объема (соответственно в локальной и глобальной нумерации), а второй индекс – номер неизвестных (также в локальной и глобальной нумерации). Поэтому процедура сборки глобальной матрицы из локальных состоит в занесении компонент локальных матриц всех ячеек дискретизации в глобальную матрицу по соответствию локальных и глобальных номеров конечных объемов (определяющих номера строк) и локальных и глобальных номеров неизвестных (определяющих номера столбцов). Глобальный вектор правой части G конечнообъемной СЛАУ собирается из локальных векторов \hat{G} только по соответствию локальных и глобальных номеров конечных объемов.

Такая же техника сборки конечнообъемной СЛАУ может быть применена при учете вкладов от краевых условий второго и третьего рода. Рассмотрим ее на примере учета краевого условия третьего рода. Пусть это краевое условие задано на ребре Г, соединяющем узлы $\{x_i, y_j\}$ и $\{x_i, y_{j+1}\}$ (т.е. узлы с глобальными номерами k и k+n). Тогда нижняя половина $\Gamma_{\rm H}$ этого ребра является частью границы $\tilde{\Gamma}_k$ конечного объема $\tilde{\Omega}_k$, а верхняя половина $\Gamma_{\rm B}$ – частью границы $\tilde{\Gamma}_{k+n}$ конечного объема $\tilde{\Omega}_{k+n}$. Поскольку в балансное соотношение для конечного объема $\tilde{\Omega}_k$ входит в виде слагаемого интеграл $-\int_{\Gamma_{\rm H}} p \frac{\partial u}{\partial n} dS$, а для ко-

нечного объема $\tilde{\Omega}_{k+n}$ – интеграл $-\int_{\Gamma_{\rm B}} p \frac{\partial u}{\partial n} dS$, и на границах $\Gamma_{\rm H}$ и $\Gamma_{\rm B}$ справед-

ливо соотношение $-p\frac{\partial u}{\partial n} = \beta(u-u_{\beta})$, то фактически нам необходимо вычислить интегралы $\int_{\Gamma_{\rm H}} \beta(u-u_{\beta}) dS$ и $\int_{\Gamma_{\rm B}} \beta(u-u_{\beta}) dS$. Для ребра Г, являющегося частью го-

ризонтальной границы, необходимо вычислить интегралы $\int_{\Gamma} \beta(u-u_{\beta}) dS$ и

 $\int \beta(u-u_{\beta})dS$, где Γ_{Π} и Γ_{Π} – соответственно левая и правая части горизонтально-

го ребра Г.

Будем считать, что на каждом ребре сетки, являющемся границей ячейки дискретизации и лежащем на границе с краевым условием второго или третьего рода, введена локальная нумерация узлов. При этом примем, что на горизонтальном ребре левая вершина имеет локальный номер 1, правая вершина – локальный номер 2, а на вертикальном ребре нижняя вершина имеет локальный номер 1, верхняя – локальный номер 2. Будем также считать, что коэффициент β постоянен на всем ребре Γ , а функции *и* и u_{β} равны \hat{u}_1 и $\hat{u}_{\beta 1}$ на $\Gamma_{\rm H}$ или Γ_{Λ} и \hat{u}_2 и $\hat{u}_{\beta 2}$ на $\Gamma_{\rm B}$ или Γ_{Π} (под $\hat{u}_{\beta 1}$ и $\hat{u}_{\beta 2}$ понимаются значения функции u_{β} из краевого условия (1.4) в вершинах ребра Γ с локальными номерами 1 и 2 соответственно). Тогда вклады от третьего краевого условия, заданного на ребре Γ , в интегробалансные соотношения для конечных объемов, построенных вокруг вершин этого ребра, могут быть представлены в следующем виде:

$$\int_{\Gamma_{1}}^{\beta} (u - u_{\beta}) dS = \beta \hat{u}_{1} \frac{h}{2} - \beta \hat{u}_{\beta 1} \frac{h}{2} ,$$

$$\int_{\Gamma_{2}}^{\Gamma_{1}} \beta (u - u_{\beta}) dS = \beta \hat{u}_{2} \frac{h}{2} - \beta \hat{u}_{\beta 2} \frac{h}{2} ,$$
(2.55)

где под *h* понимается значение h_y для вертикального ребра Γ или значение h_x для горизонтального ребра Γ , а под Γ_1 понимается Γ_H (для вертикального ребра) или Γ_{Π} (для горизонтального ребра) и под Γ_2 понимается Γ_B (для вертикального ребра) или Γ_{Π} (для горизонтального ребра). Представляя правые части соотношений (2.55) в матричном виде $\hat{A}^{S_3}\hat{U} - \hat{G}^{S_3}$, где \hat{A}^{S_3} – локальная матрица ребра $\Gamma \subset S_3$, \hat{U} – локальный вектор неизвестных, \hat{G}^{S_3} – локальный вектор правой части ребра $\Gamma \subset S_3$, получим (матрица $\hat{A}^{S_3}\hat{U} - \hat{G}^{S_3}$ есть вклады в интегробалансные соотношения для конечных объемов, примыкающих к вершинам ребра Γ):

$$\beta \hat{u}_1 \frac{h}{2} - \beta \hat{u}_{\beta 1} \frac{h}{2} = \hat{a}_{11} \hat{u}_1 + \hat{a}_{12} \hat{u}_2 - \hat{g}_1 , \qquad (2.56)$$

$$\beta \hat{u}_2 \frac{h}{2} - \beta \hat{u}_{\beta 2} \frac{h}{2} = \hat{a}_{21} \hat{u}_1 + \hat{a}_{22} \hat{u}_2 - \hat{g}_2 . \qquad (2.57)$$

Из (2.56) и (2.57) сразу же могут быть получены выражения для вычисления компонент локальной матрицы \hat{A}^{S_3} и локального вектора правой части \hat{G}^{S_3} ребра $\Gamma \subset S_3$ с заданным на нем краевым условием третьего рода:
$$\hat{a}_{11} = \beta \frac{h}{2}; \quad \hat{a}_{12} = 0;
\hat{a}_{21} = 0; \quad \hat{a}_{22} = \beta \frac{h}{2};
\hat{g}_1 = \beta \hat{u}_{\beta 1} \frac{h}{2}; \quad \hat{g}_2 = \beta \hat{u}_{\beta 2} \frac{h}{2}.$$

$$(2.58)$$

Очевидно, что процедура занесения компонент локальной матрицы \hat{A}^{S_3} и локального вектора правой части \hat{G}^{S_3} ребра $\Gamma \subset S_3$ (с заданным на нем краевым условием третьего рода) в глобальную матрицу А и глобальный вектор G правой части конечнообъемной СЛАУ та же, что и при занесении элементов локальной матрицы и локального вектора правой части ячейки дискретизации: компонента \hat{a}_{ε_n} добавляется к компоненте глобальной матрицы с номером строки, равным глобальному номеру конечного объема, построенного вокруг вершины ребра Г с локальным номером ξ, и с номером столбца, равным глобальному номеру вершины ребра Г с локальным номером η. То есть для вертикального ребра Γ с вершинами $\{x_i, y_i\}$ и $\{x_i, y_{i+1}\}$ при принятой нами глобальной нумерации узлов сетки компонента \hat{a}_{11} локальной матрицы \hat{A}^{S_3} должна быть добавлена к компоненте a_{kk} глобальной матрицы, компонента \hat{a}_{12} – к компоненте a_{kk+n} , компонента \hat{a}_{21} – к компоненте a_{k+nk} , компонента \hat{a}_{22} – к компоненте a_{k+nk+n} (заметим, что компоненты \hat{a}_{12} и \hat{a}_{21} при принятом нами способе аппроксимации функции *и* на ребре Г равны нулю и поэтому могут просто игнорироваться при занесении локальной матрицы в глобальную; но при других схемах аппроксимации и на Г они могут быть и отличными от нуля). Если же ребро Γ – горизонтальное (с вершинами $\{x_i, y_j\}$ и $\{x_{i+1}, y_j\}$), то при принятой нами глобальной нумерации узлов сетки компонента \hat{a}_{11} локальной матрицы должна быть добавлена к компоненте a_{kk} глобальной матрицы, компонента \hat{a}_{12} – к компоненте a_{kk+1} и т.д. Аналогичные рассуждения приводят нас к правилам занесения компонент локального вектора \hat{G}^{S_3} в глобальный вектор G: для вертикального ребра Γ компонента \hat{g}_1 локального вектора \hat{G}^{S_3} должна быть добавлена к компоненте g_k глобального вектора G, компонента \hat{g}_2 – к компоненте g_{k+n} ; для горизонтального ребра Г компонента \hat{g}_1 должна быть добавлена к компоненте g_k , а компонента \hat{g}_2 – к компоненте g_{k+1} .

Процедура учета краевых условий второго рода аналогична процедуре учета краевых условий третьего рода, но при этом несколько проще. Поскольку в правой части краевого условия второго рода искомая функция u отсутствует, то вкладов в матрицу конечнообъемной СЛАУ от этих краевых условий нет. Локальный же вектор правой части \hat{G}^{S_2} ребра $\Gamma \subset S_2$ (с заданным на нем краевым условием второго рода) вычисляется по соотношениям, аналогичным (2.58):

$$\hat{g}_1 = \theta \frac{h}{2}; \quad \hat{g}_2 = \theta \frac{h}{2}$$
 (2.59)

(при этом предполагается, что $\theta = const$ на Г). Процедура занесения компонент локального вектора \hat{G}^{S_2} в глобальный вектор *G* конечнообъемной СЛАУ для краевых условий второго рода ничем не отличается от соответствующей процедуры для краевых условий третьего рода.

Учет краевых условий первого рода проводится на заключительном этапе формирования глобальной матрицы и вектора правой части конечнообъемной СЛАУ. Здесь возможны несколько подходов, из которых мы рассмотрим два наиболее часто используемых. В первом подходе из собранной поэлементно конечнообъемной СЛАУ исключаются уравнения, соответствующие узлам сетки с заданными в них краевыми условиями первого рода (исключение может осуществляться обнулением соответствующей строки СЛАУ), и вместо них формируются уравнения вида $u_k = u_g$ занесением единицы на диагональ соответствующей строки матрицы СЛАУ и значения и_σ (из краевого условия (1.2)) в соответствующую компоненту ее правой части. Такой подход нарушает симметричность матрицы конечнообъемной СЛАУ, и поэтому при его использовании обычно после учета краевых условий первого рода восстанавливают симметричность матрицы А конечнообъемной СЛАУ путем исключения всех ненулевых элементов в столбцах А с номерами, равными номерам узлов, в которых заданы краевые условия первого рода.

Во втором подходе изменяются только диагональные элементы матрицы Aи элементы правой части G тех строк конечнообъемной СЛАУ, которые соответствуют попавшим на границу S_1 узлам сетки. При этом диагональный элемент модифицируемой строки заменяется достаточно большим числом χ (число χ должно быть как минимум на 4-5 порядков больше $\sum_i |a_{ij}|$, i – номер модифи-

цируемой строки, равный номеру узла с заданным в нем краевым условием первого рода), а в правую часть этой строки заносится число χu_g . Такой подход удобен тем, что он не нарушает симметричности конечнообъемной СЛАУ, но при этом необходимо более аккуратно пользоваться итерационными методами решения полученной в результате такого преобразования СЛАУ (например, в этом случае применение метода сопряженных градиентов требует обязательного использования процедуры предобусловливания СЛАУ).

Нетрудно убедиться, что глобальная матрица конечнообъемной СЛАУ при принятой нами системе нумерации узлов сетки (с включением фиктивных узлов) имеет очень регулярную структуру – ее ненулевые элементы расположены на нескольких диагоналях, параллельных главной диагонали. При этом количество ненулевых диагоналей зависит от выбранной схемы аппроксимации самой функции u и ее производных по нормалям в интегробалансных соотношениях – для рассматриваемого нами случая в матрице A конечнообъемной СЛАУ всего пять ненулевых диагоналей: главная, две рядом с ней (сверху и снизу) и еще две через n диагоналей вверх и вниз от главной. Если учесть симмет-

ричность этой матрицы, то в памяти компьютера достаточно держать только один из треугольников этой матрицы – верхний или нижний. Хранить этот треугольник очень удобно в массиве 3×nm, где nm – полное число узлов (включая фиктивные) в прямоугольной сетке (n – число узлов по оси x, m – число узлов по оси u), причем в *i*-й строке этого массива лучше хранить все три ненулевых компоненты *i*-й строки одного из треугольников (верхнего или нижнего) матрицы конечнообъемной СЛАУ. Отметим, что в этом случае в соответствующих фиктивным узлам (и, возможно, узлам, лежащим на границе S₁) строках матрицы будут храниться два нуля – ненулевым будет только диагональный элемент. Конечно, если фиктивных узлов в сетке слишком много, то эффективность такого способа хранения конечнообъемной СЛАУ значительно уменьшится – в этом случае можно выполнить процедуру сжатия СЛАУ с удалением из нее всех строк с единственным ненулевым элементом на главной диагонали. Но тогда будет разрушена и регулярная структура матрицы СЛАУ: для определения местоположения ненулевого элемента из крайней диагонали в каждой строке придется хранить одно целое число – либо номер столбца, либо расстояние от этого ненулевого элемента до главной диагонали. Конечно, идти на такое усложнение формы хранения матрицы СЛАУ имеет смысл лишь тогда, когда число фиктивных узлов очень велико.

Отметим, что при использовании других схем аппроксимации искомой функции *u* и ее производных по нормалям в интегробалансных соотношениях структура матрицы конечнообъемной СЛАУ может несколько измениться. Так если при аппроксимации интегралов $\int_{\Gamma_{12}} p \frac{\partial u}{\partial n} dS$ и $\int_{\Gamma_{13}} p \frac{\partial u}{\partial n} dS$ считать, что производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ меняется линейно вдоль границ Γ_{12} и Γ_{13} от значения $\frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{h_x}$ в нижней точке границы Γ_{12} до значения $\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{h_x} + \frac{\hat{u}_4 - \hat{u}_3}{h_x} \right)$ в центре ячейки Ω_{ij} и от значения $\frac{\hat{u}_3 - \hat{u}_1}{h_y}$ в левой точке границы Γ_{13} до значения $\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{u}_3 - \hat{u}_1}{h_y} + \frac{\hat{u}_4 - \hat{u}_2}{h_y} \right)$ в центре Ω_{ij} (см. рис. 10), то вместо соотношения (2.42)

мы получим вклад в интегробалансное соотношение для конечного объема $\tilde{\Omega}_k$ от ячейки Ω_{ii} в виде

$$-\overline{p}\left(\frac{3}{4}\frac{\hat{u}_{2}-\hat{u}_{1}}{h_{x}}+\frac{1}{4}\frac{\hat{u}_{4}-\hat{u}_{3}}{h_{x}}\right)\frac{h_{y}}{2}-\overline{p}\left(\frac{3}{4}\frac{\hat{u}_{3}-\hat{u}_{1}}{h_{y}}+\frac{1}{4}\frac{\hat{u}_{4}-\hat{u}_{2}}{h_{y}}\right)\frac{h_{x}}{2}+\overline{\gamma}\hat{u}_{1}\frac{h_{x}h_{y}}{4}.$$

Заметим, что те же самые соотношения для поверхностных интегралов можно было бы получить, если функцию u представить на ячейке Ω_{ii} в виде ли-

нейной комбинации $\sum_{\xi=1}^{4} \hat{u}_{\xi} \hat{\psi}_{\xi}(x,y)$, где $\hat{\psi}_{\xi}(x,y)$ – билинейная базисная функция,

равная единице в вершине ячейки Ω_{ij} с локальным номером ξ и нулю во всех остальных вершинах Ω_{ij} (подробней об этих функциях будет сказано в следующей главе).

Аналогично и при вычислении объемного интеграла $\int_{\Omega^{\Pi H}} \gamma u d\Omega$ функция u

может быть заменена своим приближенным значением в центре четвертинки $\Omega_{ii}^{\Pi H}$

$$u \approx \frac{1}{4} \left(\hat{u}_1 + \frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2} + \frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_3}{2} + \frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \hat{u}_4}{4} \right),$$

где $\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2}$ – аппроксимация значения *и* в центре ребра, соединяющего узлы с локальными номерами 1 и 2; $\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_3}{2}$ – аппроксимация значения *и* в центре ребра, соединяющего узлы с локальными номерами 1 и 3; $\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \hat{u}_4}{4}$ – аппроксимация значения *и* в центре ячейки Ω_{ii} .

Нетрудно убедиться, что при использовании таких аппроксимаций искомой функции u и ее производных по нормалям элементы \hat{a}_{14} , \hat{a}_{23} , \hat{a}_{32} и \hat{a}_{41} в локальной матрице ячейки дискретизации Ω_{ij} станут ненулевыми. Это приведет к появлению еще четырех ненулевых диагоналей в глобальной матрице конечнообъемной СЛАУ: две ненулевые диагонали добавятся вокруг крайней нижней, и две ненулевые диагонали – вокруг крайней верхней диагонали. Структура такой матрицы конечнообъемной СЛАУ приведена на рис. 11.

В заключение данного пункта рассмотрим конечнообъемную аппроксимацию двумерной краевой задачи для уравнения (1.5) на прямоугольных сетках. Как уже отмечалось выше, краевые задачи такого рода описывают стационарные магнитные поля, порождаемые токами \vec{J} .

Мы будем полагать, что в уравнении (1.5) вектор токов \vec{J} и векторпотенциал \vec{A} имеют лишь одну ненулевую компоненту: $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z) = (0, 0, J_z), \quad \vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, 0, A_z)$ и $J_z = J_z(x, y),$ $A_z = A_z(x, y)$. То есть фактически дифференциальное уравнение (1.5) определено в двумерной области Ω , которая является частью поверхности z=0, и через отдельные участки области Ω могут протекать токи, перпендикулярные плоскости, в которой лежит область Ω . В таком случае любые замкнутые кривые, лежащие внутри Ω или частично совпадающие с ее границами, могут быть проинтерпретированы как контуры, а заключенные внутри этих контуров части расчетной области Ω – как некоторые поверхности, натянутые на эти контуры. Заметим, что в такого рода задачах расчетная область Ω является, как правило, прямоугольником, состоящим из нескольких подобластей, и на границах Ω могут быть заданы только либо условия симметрии, либо условия удаленной границы, которые описываются однородными краевыми условиями первого или второго рода.



Рис. 11 Структура 9-диагональной матрицы СЛАУ

Будем считать, что прямоугольная область Ω разбита прямыми $x=x_i$, i=1, ..., n, и $y=y_j, j=1, ..., m$ на прямоугольные ячейки дискретизации Ω_{ij} , из четвертинок которых составлены конечные объемы $\tilde{\Omega}_k$ (так же, как это было сделано выше при аппроксимации краевой задачи для уравнения (1.1); номер k конечного объема $\tilde{\Omega}_k$ связан с индексами i и jячейки дискретизации Ω_{ij} соотношением (2.35)). Для построения интегробалансных соотношений проинтегрируем уравнения (1.5) по каждому из конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$

$$\int_{\tilde{\Omega}_{k}} rot\left(\frac{1}{\mu}rot\vec{A}\right)d\vec{\Omega} = \int_{\tilde{\Omega}_{k}}\vec{J}d\vec{\Omega}, \quad k = 1, ..., nm,$$
(2.60)

где под интегралом $\int_{Q} \vec{D} d\vec{Q}$ понимается значение интеграла по поверхности Q перпендикулярной к Q составляющей вектор-функции \vec{D} , т.е. $\int_{Q} \vec{D} d\vec{Q}$, где D_n – перпендикулярная к Q составляющая вектора \vec{D} , которую называют также нормальной к поверхности Q составляющей вектора \vec{D} (не путать с проекция-

ми вектора на нормали <u>к границам</u> области Q, которые лежат <u>в той же плоскости, что и Q). Учитывая, что нормалью к конечным объемам $\tilde{\Omega}^k$ (а не к их <u>гра-</u><u>ницам</u> (!)) является ось z, правая часть соотношения (2.60) может быть переписана в виде</u>

$$\int_{\tilde{\Omega}_{k}} \vec{J} d\vec{\Omega} = \int_{\tilde{\Omega}_{k}} J_{z} d\Omega \quad . \tag{2.61}$$

Преобразуем левую часть соотношения (2.60), воспользовавшись теоремой Стокса

$$\int_{Q} rot \vec{B} d\vec{Q} = \oint_{C} \vec{B} d\vec{C}, \qquad (2.62)$$

где Q – любая поверхность, ограниченная замкнутым контуром C, а под $\oint_C \vec{B} d\vec{C}$

понимается циркуляция вектор-функции \vec{B} по контуру *C*. Циркуляция векторфункции \vec{B} по контуру *C* вычисляется путем интегрирования вдоль *C* проекции вектора \vec{B} на касательный к контуру *C* вектор, направленный в сторону обхода *C*, а направление обхода контура *C* определяется правилом правого буравчика и выбранным направлением нормали к поверхности *Q*: правый буравчик при вращении его по направлению обхода *C* должен двигаться в направлении нормали к поверхности *Q*, используемой для вычисления левой части соотношения (2.62) (т.е. фактически от выбранного направления нормали к *Q* зависит лишь знак левой и правой частей соотношения (2.62)).

Подставляя соотношения (2.61) и (2.62) в (2.60), получим систему уравнений

$$\oint_{\widetilde{\Gamma}_k} \frac{1}{\mu} rot \vec{A} d\vec{C} = \int_{\widetilde{\Omega}_k} J_z d\Omega, \quad k = 1, ..., nm , \qquad (2.63)$$

где $\widetilde{\Gamma}_k$ – граница конечного объема $\widetilde{\Omega}_k$.

Поскольку вектор-функция \vec{A} имеет лишь одну ненулевую компоненту A_z , то $rot\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, 0\right)$. Поэтому систему уравнений (2.63) можно перепи-

$$\oint_{\widetilde{\Gamma}_k} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \tau_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tau_y \right) dC = \int_{\widetilde{\Omega}_k} J_z d\Omega, \quad k = 1, ..., nm \quad ,$$
(2.64)

где τ_x и τ_y – компоненты касательного к *C* вектора $\vec{\tau}$, имеющего единичную длину (так как $\tau_x^2 + \tau_y^2 = 1$, $\tau_z = 0$, поскольку контур *C* лежит в плоскости *z*=0). Если обозначить искомую функцию $A_z = A_z(x, y)$ через *u*, плотность токов J_z через *f*, а коэффициент $\frac{1}{\mu}$ через *p*, то система уравнений (2.64) может быть записана в виде

$$\oint_{\widetilde{\Gamma}_{k}} p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\tau_{x} - \frac{\partial u}{\partial x}\tau_{y}\right) dC = \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} f d\Omega, \quad k = 1, ..., nm , \qquad (2.65)$$

причем направление обхода границы $\tilde{\Gamma}_k$ при вычислении циркуляции в левой части (2.65) должно быть против часовой стрелки (так как выбранное нами направление нормали к $\tilde{\Omega}_k$ совпадает с осью *z* и правый буравчик для движения по оси *z* должен вращаться против часовой стрелки).

Для реализации процедуры генерации матрицы и вектора правой части конечнообъемной СЛАУ, аппроксимирующей систему интегробалансных соотношений (2.65), мы, как и прежде, будем использовать технологию поэлементной сборки глобальной матрицы и вектора правой части СЛАУ из локальных матриц и векторов отдельных ячеек дискретизации Ω_{ij} . Нетрудно убедиться, что в этом случае для формирования элементов локальной матрицы достаточно

получить дискретные аналоги интегралов вида $\int_{\Gamma} p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \tau_x - \frac{\partial u}{\partial x} \tau_y \right) dC$ по грани-

цам Γ_{12} , Γ_{13} , Γ_{24} и Γ_{34} четвертинок $\Omega_{ij}^{\text{лн}}$, $\Omega_{ij}^{\text{пн}}$, $\Omega_{ij}^{\text{лв}}$ и $\Omega_{ij}^{\text{пв}}$ ячейки Ω_{ij} (см. рис. 10) и суммированием полученных выражений с нужным знаком (определяемым направлением обхода границ четвертинок ячейки Ω_{ij}) сформировать вклады от этих четвертинок в интегробалансные соотношения для конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$, $\tilde{\Omega}_{k+1}$, $\tilde{\Omega}_{k+n}$ и $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$ (которые в локальной нумерации имеют соответственно номера 1, 2, 3 и 4).

Прежде чем приступить к вычислению компонент локальной матрицы \hat{A} ячейки дискретизации Ω_{ij} , установим соответствие между направлением обхода границ конечных объемов и ориентацией границ Γ_{12} , Γ_{13} , Γ_{24} и Γ_{34} внутри ячей-ки Ω_{ij} . На рис. 12 показаны направления обходов границ конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$, $\tilde{\Omega}_{k+1}$, $\tilde{\Omega}_{k+n}$ и $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$ (являющихся частями ячейки дискретизации Ω_{ij}) с учетом выбранного нами направления нормали ко всем конечным объемам, совпадающего с направлением оси z, а также показана ориентация границ Γ_{12} , Γ_{13} , Γ_{24} и Γ_{34} – касательные векторы $\vec{\tau}$ к этим границам внутри ячейки Ω_{ij} направлены из центра Ω_{ij} к ее внешним границам $y=y_j$, $x=x_i$, $x=x_{i+1}$ и $y=y_{j+1}$ соответственно, т.е. для границы Γ_{12} компоненты τ_x и τ_y касательного вектора $\vec{\tau}$ равны 0 и –1 соответственно, для Γ_{13} – $\tau_x=-1$ и $\tau_y=0$, для Γ_{24} – $\tau_x=1$ и $\tau_y=0$, а для Γ_{34} – $\tau_x=0$ и $\tau_y=1$. С учетом этого

$$\int_{\Gamma_{12}} p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\tau_x - \frac{\partial u}{\partial x}\tau_y\right) d\Gamma = \int_{y_j}^{y_j + h_y/2} p\frac{\partial u}{\partial x} dy, \qquad (2.66)$$

$$\int_{\Gamma_{13}} p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\tau_x - \frac{\partial u}{\partial x}\tau_y\right) d\Gamma = -\int_{x_i}^{x_i + h_x/2} p\frac{\partial u}{\partial y} dx,$$
(2.67)

$$\int_{\Gamma_{24}} p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\tau_x - \frac{\partial u}{\partial x}\tau_y\right) d\Gamma = \int_{x_i + h_x/2}^{x_i + h_x} p\frac{\partial u}{\partial y} dx,$$
(2.68)

$$\int_{\Gamma_{34}} p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\tau_x - \frac{\partial u}{\partial x}\tau_y\right) d\Gamma = -\int_{y_j + h_y/2}^{y_j + h_y} p\frac{\partial u}{\partial x} dy.$$
(2.69)



Рис. 12. Ориентация границ Γ_{12} , Γ_{13} , Γ_{24} и Γ_{34} и направления обходов тех частей границ конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$, $\tilde{\Omega}_{k+1}$, $\tilde{\Omega}_{k+n}$ и $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$, которые лежат в ячейке дискретизации Ω_{ij}

Как и при построении дискретного аналога краевой задачи для уравнения (1.1), здесь также возможны различные варианты аппроксимации производных искомой функции *u*. Так, например, производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ в правой части соотношения (2.66) может быть аппроксимирована своим значением в центре границы Γ_{12}

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{h_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{h_x} + \frac{\hat{u}_4 - \hat{u}_3}{h_x} \right) \right).$$
(2.70)

Заметим, что значение получено как полусумма аппроксимаций производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точках $\{x_i + h_x/2, y_j\}$ и $\{x_i + h_x/2, y_j + h_y/2\}$, причем аппроксимация $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $\{x_i + h_x/2, y_j + h_y/2\}$ в свою очередь получена как полусумма аппрок-

симаций $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точках $\{x_i + h_x/2, y_j\}$ и $\{x_i + h_x/2, y_j + h_y\}$. Мы же остановимся на простейшей аппроксимации производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ на границах конечных объемов: эти производные будем аппроксимировать значением разностной производной на границах ячейки дискретизации Ω_{ij} . Отметим, что для внутреннего узла сетки эта аппроксимация соответствует замене производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ или $\frac{\partial u}{\partial y}$ на границах конечного объема их разностными аналогами <u>в центрах</u> этих границ (на ячейке дискретизации Ω_{ij} видны только половинки полных

этих границ (на ячейке дискретизации Ω_{ij} видны только половинки полных границ конечных объемов, построенных вокруг внутренних узлов). В этом случае

$$\int_{y_{j}}^{y_{j}+h_{y}/2} p \frac{\partial u}{\partial x} dy \approx \overline{p} \frac{\hat{u}_{2}-\hat{u}_{1}}{h_{x}} \frac{h_{y}}{2}, \qquad \int_{x_{i}}^{x_{i}+h_{x}/2} p \frac{\partial u}{\partial y} dx \approx \overline{p} \frac{\hat{u}_{3}-\hat{u}_{1}}{h_{y}} \frac{h_{x}}{2},$$

$$\int_{x_{i}+h_{x}/2}^{x_{i}+h_{x}} p \frac{\partial u}{\partial y} dx \approx \overline{p} \frac{\hat{u}_{4}-\hat{u}_{2}}{h_{y}} \frac{h_{x}}{2}, \qquad \int_{y_{j}+h_{y}/2}^{y_{j}+h_{y}} p \frac{\partial u}{\partial x} dy \approx \overline{p} \frac{\hat{u}_{4}-\hat{u}_{3}}{h_{x}} \frac{h_{y}}{2},$$

$$(2.71)$$

где \overline{p} – среднее значение коэффициента p на ячейке Ω_{ij} .

При формировании вкладов от рассматриваемой ячейки Ω_{ij} в глобальную матрицу конечнообъемной СЛАУ обратим внимание на то, что

- границы конечного объема Ω_k (имеющего локальный номер 1) обходятся по направлению, противоположному выбранному нами направлению Γ₁₂ и совпадающему с направлением Γ₁₃ (см. рис. 12);
- границы конечного объема Ω̃_{k+1} (имеющего локальный номер 2) обходятся по направлению, совпадающему с направлением Γ₁₂ и противоположному направлению Γ₂₄;
- границы конечного объема Ω_{k+n} (имеющего локальный номер 3) обходятся по направлению, противоположному направлению Γ₁₃ и совпадающему с направлением Γ₃₄;
- границы конечного объема Ω_{k+n+1} (имеющего локальный номер 4) обходятся по направлению, совпадающему с направлением Γ₂₄ и противоположному направлению Γ₃₄.

В результате на основании соотношений (2.66)-(2.69) и (2.71) с учетом направления обхода границ конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$, $\tilde{\Omega}_{k+1}$, $\tilde{\Omega}_{k+n}$ и $\tilde{\Omega}_{k+n+1}$, принадлежащих ячейке дискретизации Ω_{ij} , легко получить вклады от этой ячейки Ω_{ij} в левые части дискретных аналогов интегробалансных соотношений (2.65) (при этом мы учтем, что во всех нижеследующих интегралах в качестве подын-

тегральной функции выступает одно и то же выражение $p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\tau_x - \frac{\partial u}{\partial x}\tau_y\right)$, и по-

этому оно будет опущено, а вместо него будет поставлен знак \bullet):

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_k} \bullet d\Gamma \quad \longleftarrow \quad -\int_{\widehat{\Gamma}_{12}} \bullet d\Gamma + \int_{\widehat{\Gamma}_{13}} \bullet d\Gamma \approx -\overline{p} \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{h_x} \frac{h_y}{2} - \overline{p} \frac{\hat{u}_3 - \hat{u}_1}{h_y} \frac{h_x}{2} , \qquad (2.72)$$

$$\int \bullet d\Gamma \quad \longleftarrow \quad \int \bullet d\Gamma - \int \bullet d\Gamma \approx \overline{p} \frac{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}{h_x} \frac{h_y}{2} - \overline{p} \frac{\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_2}{h_y} \frac{h_x}{2} , \qquad (2.73)$$

$$\int \mathbf{\Phi} d\Gamma \quad \longleftarrow \quad -\int \mathbf{\Phi} d\Gamma + \int \mathbf{\Phi} d\Gamma \approx \overline{p} \frac{\hat{u}_3 - \hat{u}_1}{h_x} \frac{h_y}{2} - \overline{p} \frac{\hat{u}_4 - \hat{u}_3}{h_y} \frac{h_x}{2} , \qquad (2.74)$$

$$\int \bullet d\Gamma \quad \longleftarrow \quad \int \bullet d\Gamma - \int \bullet d\Gamma \approx \overline{p} \frac{\hat{u}_4 - \hat{u}_2}{h_x} \frac{h_y}{2} + \overline{p} \frac{\hat{u}_4 - \hat{u}_3}{h_y} \frac{h_x}{2} . \tag{2.75}$$

Из соотношения (2.72) получаем компоненты первой строки локальной матрицы ячейки Ω_{*ii*}, из (2.73) – второй, из (2.74) – третьей и из (2.75) – четвертой:

$$\hat{a}_{11} = \frac{\overline{p} h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p} h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{12} = -\frac{\overline{p} h_y}{2h_x}; \quad \hat{a}_{13} = -\frac{\overline{p} h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{14} = 0;$$
(2.76)

$$\hat{a}_{21} = -\frac{\overline{p}h_y}{2h_x}; \quad \hat{a}_{22} = \frac{\overline{p}h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{23} = 0; \quad \hat{a}_{24} = -\frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad (2.77)$$

$$\hat{a}_{31} = -\frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{32} = 0; \quad \hat{a}_{33} = \frac{\overline{p}h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{34} = -\frac{\overline{p}h_y}{2h_x}; \quad (2.78)$$

$$\hat{a}_{41} = 0; \quad \hat{a}_{42} = -\frac{\overline{p}h_x}{2h_y}; \quad \hat{a}_{43} = -\frac{\overline{p}h_y}{2h_x}; \quad \hat{a}_{44} = \frac{\overline{p}h_y}{2h_x} + \frac{\overline{p}h_x}{2h_y}.$$
 (2.79)

Сравнивая соотношения (2.76)-(2.79) с (2.49)-(2.52) убеждаемся, что конечнообъемная аппроксимация члена -div(pgradu) из дифференциального уравнения (1.1) и члена $rot_z(prot \vec{A})$ из дифференциального уравнения (1.5) при $\vec{A} = (0, 0, u(x, y))$ и $p = \frac{1}{\mu}$ приводит к одной и той же локальной матрице (при одинаковом способе аппроксимации производных искомой функции *u* в соот-

ветствующих интегробалансных соотношениях) даже несмотря на то, что дискретный аналог краевой задачи для уравнения (1.1) строился на основании теоремы Остроградского-Гаусса, а дискретный аналог краевой задачи для уравнения (1.5) – на основании теоремы Стокса. Но, вообще говоря, ничего странного

в этом нет, так как при сделанных нами предположениях о виде векторпотенциала \vec{A} (т.е. при $\vec{A} = (0,0,u(x,y))$) выражение $rot_z(prot \vec{A})$ легко преобразуется в выражение -div(p grad u). Отметим, что и для осесимметричных задач (т.е. при $\vec{A} = (A_r, A_{\phi}, A_z) = (0, A_{\phi}, 0), A_{\phi} = A_{\phi}(r, z)$) существует связь между $rot_{\varphi}(prot \vec{A})$ и $-div(pgrad A_{\varphi})$, но выражения эти уже не тождественны, и при использовании теорем Стокса и Остроградского-Гаусса полученные дискретные аналоги будут различаться.

Процедуры сборки глобальной матрицы и вектора правой части конечнообъемной СЛАУ из локальных ничем не отличаются от рассмотренных выше (как и формулы вычисления компонент локального вектора правой части, см. соотношения (2.53)-(2.54)). В результате в зависимости от способа аппроксимации производных искомой функции *и* в интегробалансных соотношениях (2.65) глобальная матрица конечнообъемной СЛАУ будет иметь либо пять ненулевых диагоналей (при $\hat{a}_{14} = \hat{a}_{13} = \hat{a}_{32} = \hat{a}_{41} = 0$, см. (2.76)-(2.79)), либо девять. Нетрудно также убедиться, что никаких вкладов от однородных краевых условий второго рода ни в матрицу, ни в вектор правой части конечнообъемной

СЛАУ нет, так как эти вклады имеют вид $\int_{\Gamma}^{2} p \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma$ на вертикальных границах расчетной области Ω и $\int_{\Gamma}^{2} p \frac{\partial u}{\partial y} d\Gamma$ на горизонтальных, а на тех вертикальных гра-

ницах, где заданы однородные краевые условия второго рода, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, и аналогично на тех горизонтальных границах, где заданы однородные краевые условия второго рода, $\frac{\partial u}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Учет же краевых условий первого рода осуществляется абсолютно так же, как и при аппроксимации уравнения (1.1).

ПРИМЕНЕНИЕ МКО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ 2.3. КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Рассмотренные выше подходы к решению двумерных краевых задач с использованием прямоугольных ячеек дискретизации довольно просты и удобны для реализации. Но во многих практических ситуациях треугольные сетки гораздо более эффективны – они позволяют значительно точнее описывать сложную геометрию и более эффективно сгущать и разрежать узлы сетки при аппроксимации задач с большими изменениями градиентов решения.

Построение треугольной сетки в расчетной области со сложными внутренними и внешними границами представляет отдельную проблему, выходящую за рамки изучаемых в данном учебном пособии задач. Мы будем исходить из того, что треугольная сетка задана в виде набора узлов и набора треугольников. Каждый узел сетки описывается двумя координатами x_k и y_k , а каждый треугольник Ω_m – четырьмя числами, первые три из которых – номера узлов сетки, являющихся вершинами рассматриваемого треугольника, а четвертый – номер подобласти расчетной области, в которой лежит данный треугольник. Таким образом, объединение всех треугольников Ω_m представляет собой расчетную область (или аппроксимацию расчетной области при наличии в ней криволинейных границ). Будем также считать, что границы расчетной области типа S_1 (т.е. те границы, на которых задано краевое условие первого рода) представляется номером узла, лежащим на S_1 , а второе служит для определения значения параметра этого краевого условия. Границы же типа S_2 и S_3 с заданными на них краевыми условиями второго и третьего рода должны быть представлены наборами ребер, каждое из которых описывается тремя целыми числами, причем первые два числа – это номера узлов сетки, являющихся вершинами рассматриваемого ребра, а третье число служит для определения значений параметров заданного на ребре краевого условия.

Итак, наша задача – построить дискретный аналог краевой задачи (1.1)-(1.4) с использованием заданной в расчетной области Ω треугольной сетки и представленной в виде описанных выше наборов координат узлов сетки, треугольников, узлов с заданными в них краевыми условиями первого рода и ребер с заданными на них краевыми условиями второго и третьего рода.

Получим интегробалансные соотношения, на основании которых будет строиться дискретный аналог исходной краевой задачи. Для этого необходимо разбить расчетную область на конечные объемы и проинтегрировать по ним уравнение (1.1), причем конечные объемы должны быть построены таким образом, чтобы на их границах можно было вычислить потоки $p \frac{\partial u}{\partial n}$ с использованием значений искомой функции u в узлах сетки $\{x_k, y_k\}$.

Построим вокруг каждого узла сетки $\{x_k, y_k\}$ конечный объем $\tilde{\Omega}_k$ таким образом, как это показано на рис. 13 и 14, т.е. в конечный объем $\tilde{\Omega}_k$ включают-ся части тех треугольников Ω_m , у которых одной из вершин является узел сетки $\{x_k, y_k\}$. При этом треугольники Ω_m разбиваются на три части отрезками, концами которых является центр масс треугольника $\left\{\frac{x_{m_1} + x_{m_2} + x_{m_3}}{3}, \frac{y_{m_1} + y_{m_2} + y_{m_3}}{3}\right\}$ (m_1, m_2 и m_3 – номера узлов, являющихся

вершинами треугольника Ω_m) и середины его сторон $\left\{\frac{x_{m_1} + x_{m_2}}{2}, \frac{y_{m_1} + y_{m_2}}{2}\right\},$

 $\left\{\frac{x_{m_1} + x_{m_3}}{2}, \frac{y_{m_1} + y_{m_3}}{2}\right\} \ \text{i} \left\{\frac{x_{m_2} + x_{m_3}}{2}, \frac{y_{m_2} + y_{m_3}}{2}\right\} - \text{это разбиение показано на рис. 15.}$



Рис. 13. Разбиение фрагмента расчетной области, представленной в виде набора треугольников Ω_m , на конечные объемы $\tilde{\Omega}_k$, каждый из которых построен вокруг одного узла треугольной сетки



Рис. 14. Вид конечного объема $ilde{\Omega}_k$, построенного вокруг граничного узла с номером k

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (1.1) по каждому из конечных объемов $\tilde{\Omega}_k$

$$-\int_{\widetilde{\Omega}_{k}} div(p \, g \, rad \, u) d\Omega + \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} \gamma u \, d\Omega = \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} f \, d\Omega, \qquad k = 1, ..., K,$$
(2.80)

где *К* – общее число узлов в треугольной сетке. Применяя теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем (2.80) к виду

$$-\int_{\widetilde{\Gamma}_{k}} p \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega + \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} \gamma u \, d\Omega = \int_{\widetilde{\Omega}_{k}} f \, d\Omega, \qquad k = 1, ..., K,$$
(2.81)

где $\widetilde{\Gamma}_k$ – граница конечного объема $\widetilde{\Omega}_k$.



Чтобы построить дискретный аналог каждого из интегробалансных соотношений (2.81), необходимо проинтегрировать поток $p \frac{\partial u}{\partial n}$ по границам, а γu и f – по частям конечного объема $\tilde{\Omega}_k$, которые находятся внутри примыкающих к k-му узлу треугольников сетки (см. рис. 13). Из дальнейших рассуждений будет легко увидеть, что поузловая сборка конечнообъемной СЛАУ потребует не только гораздо больших вычислительных затрат при решении конкретных задач, но и значительно более сложных процедур ее программной реализации (например, при ее реализации для каждого узла необходимо знать номера примыкающих к нему треугольников сетки и ребер с заданными на них краевыми условиями второго и третьего рода, что приводит к необходимости формирования дополнительных структур данных большого объема). Поэтому мы будем рассматривать только технологию поэлементной сборки конечнообъемной СЛАУ.

Рассмотрим элемент Ω_m треугольной сетки, вершины которого имеют номера m_1, m_2 и m_3 (см. рис. 15). Этот элемент включает в себя части от трех конечных объемов: $\tilde{\Omega}_{m_1}, \tilde{\Omega}_{m_2}$ и $\tilde{\Omega}_{m_3}$ (на рис.15 по-разному заштрихованы части треугольника Ω_m , принадлежащие разным конечным объемам). Введем на Ω_m локальную нумерацию вершин, узловых значений функции u, частей и границ входящих в Ω_m конечных объемов. Эта нумерация показана на рис. 16. В соответствии с ней координаты вершины с глобальным номером m_1 обозначим через $\{\hat{x}_1, \hat{y}_1\}$, вершины с глобальным номером m_2 – через $\{\hat{x}_2, \hat{y}_2\}$, вершины с глобальным номером m_3 – через $\{\hat{x}_3, \hat{y}_3\}$; значение u в вершине m_1 обозначим через \hat{u}_1 , в вершине m_2 – через \hat{u}_2 , в вершине m_3 – через \hat{u}_3 ; часть конечного объема $\tilde{\Omega}_{m_1}$, лежащую внутри Ω_m , обозначим через $\hat{\Omega}_1$, часть конечного объема $\tilde{\Omega}_{m_2}$ – через $\hat{\Omega}_2$, часть конечного объема $\tilde{\Omega}_{m_3}$ – через $\hat{\Omega}_2$, часть конечного объема $\tilde{\Omega}_{m_3}$ – через $\hat{\Omega}_3$; часть границы $\Gamma_{m_1m_2}$ между конечными объемами $\tilde{\Omega}_{m_1}$ и $\tilde{\Omega}_{m_2}$, лежащую внутри Ω_m , обозначим через $\hat{\Gamma}_{12}$, часть границы $\Gamma_{m_2m_3}$ между конечными объемами $\tilde{\Omega}_{m_3}$ и $\tilde{\Omega}_{m_1}$ – через $\hat{\Gamma}_{23}$, а часть границы $\Gamma_{m_3m_1}$ между конечными объемами $\tilde{\Omega}_{m_3}$ и $\tilde{\Omega}_{m_1}$ – через $\hat{\Gamma}_{31}$ (см. рис. 16).



Рис. 16. Локальная нумерация вершин треугольника Ω_m , значений функции u в них и содержащихся внутри Ω_m частей $\hat{\Omega}_1$, $\hat{\Omega}_2$ и $\hat{\Omega}_3$ конечных объемов $\tilde{\Omega}_{m_1}$, $\tilde{\Omega}_{m_2}$ и $\tilde{\Omega}_{m_3}$, а также границ $\hat{\Gamma}_{12}$, $\hat{\Gamma}_{23}$ и $\hat{\Gamma}_{31}$ между этими частями. Локальная нумерация вершин треугольника Ω_m в данном случае соответствует их правому обходу. Нормали \vec{n}_{12} , \vec{n}_{23} и \vec{n}_{31} к границам

 $\hat{\Gamma}_{12}, \, \hat{\Gamma}_{23}$ и $\hat{\Gamma}_{31}$ также направлены против часовой стрелки)

Будем считать, что функция u на каждом треугольнике Ω_m является линейной функцией координат x и y. Введем на Ω_m три линейные функции $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$ и $L_3(x, y)$ такие, что функция L_1 равна единице в вершине $\{\hat{x}_1, \hat{y}_1\}$ и нулю в двух остальных вершинах Ω_m , функция L_2 равна единице в вершине $\{\hat{x}_2, \hat{y}_2\}$ и нулю в двух остальных вершинах Ω_m , а функция L_3 равна единице в вершине $\{\hat{x}_3, \hat{y}_3\}$ и нулю в двух остальных вершинах Ω_m . Нетрудно убедиться, что для этих функций справедливы соотношения

$$L_{1} + L_{2} + L_{3} = 1,$$

$$L_{1}\hat{x}_{1} + L_{2}\hat{x}_{2} + L_{3}\hat{x}_{3} = x,$$

$$L_{1}\hat{y}_{1} + L_{2}\hat{y}_{2} + L_{3}\hat{y}_{3} = y.$$
(2.82)

Действительно, любая линейная на Ω_m функция может быть представлена в виде линейной комбинации функций L₁, L₂ и L₃, причем коэффициентами этой линейной комбинации должны быть значения линейной функции в вершинах треугольника Ω_m. Заметим, что любая двумерная линейная функция $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$ имеет 3 параметра α_0 , α_1 и α_2 и однозначно определяется своими значениями в трех любых точках, не лежащих на одной прямой, а поскольку линейная комбинация трех линейных функций L₁, L₂ и L₃ является линейной функцией, то из совпадения значений этой линейной комбинации с значениями некоторой линейной по х и ц функции в трех точках, не лежащих на одной прямой, сразу можно сделать вывод о тождественном совпадении этой линейной функции с построенной таким способом линейной комбинацией функций L_1 , L_2 и L_3 . Первое уравнение системы (2.82) дает представление линейной функции 1 в виде линейной комбинации функций L_1 , L_2 и L_3 (все коэффициенты этой линейной комбинации равны единице, так как они являются значениями разлагаемой по L_1, L_2 и L_3 функции в вершинах треугольника Ω_m); второе и третье уравнения системы (2.82) дают представления линейных функций *x* и *u* в виде линейных комбинаций функций L₁, L₂ и L₃ (коэффициенты этих линейных комбинаций равны значениям разлагаемых функций в вершинах треугольника Ω_m). Систему (2.82) можно переписать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$
(2.83)

Из (2.83) получаем

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$
 (2.84)

Из (2.84) следует, что компоненты матрицы, обратной к матрице

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \end{pmatrix},$$
(2.85)

являются коэффициентами линейных функций L₁, L₂ и L₃:

$$L_i = \alpha_0^i + \alpha_1^i x + \alpha_2^i y, \qquad i = 1, 2, 3,$$
(2.86)

где

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_0^3 & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \end{pmatrix}^{-1}.$$
(2.87)

Отметим, что через матрицу *D*, определяемую соотношением (2.85), может быть вычислена площадь треугольника Ω_m с вершинами $\{\hat{x}_1, \hat{y}_1\}, \{\hat{x}_2, \hat{y}_2\}$ и $\{\hat{x}_3, \hat{y}_3\}$

$$mes\,\Omega_m = \frac{1}{2} |\det D|,\tag{2.88}$$

где det D – определитель матрицы D. Значения det D и компонент D^{-1} , являющихся коэффициентами α_j^i функций L_1 , L_2 и L_3 (см.(2.86)–(2.87)), легко вычисляются из определения матрицы D:

$$\det D = (\hat{x}_2 - \hat{x}_1)(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) - (\hat{x}_3 - \hat{x}_1)(\hat{y}_2 - \hat{y}_1)$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \hat{y}_3 - \hat{x}_3 \hat{y}_2 & \hat{y}_2 - \hat{y}_3 & \hat{x}_3 - \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \hat{y}_1 - \hat{x}_1 \hat{y}_3 & \hat{y}_3 - \hat{y}_1 & \hat{x}_1 - \hat{x}_3 \\ \hat{x}_1 \hat{y}_2 - \hat{x}_2 \hat{y}_1 & \hat{y}_1 - \hat{y}_2 & \hat{x}_2 - \hat{x}_1 \end{pmatrix}.$$
(2.89)
$$(2.89)$$

Функции L_1 , L_2 и L_3 называются <u>L-координатами</u> или естественными координатами треугольника. Они очень удобны тем, что для них существуют очень простые формулы, позволяющие вычислять интегралы от произведений L_i в произвольных степенях по треугольнику Ω_m и любым его границам Г

$$\int_{\Omega_m} (L_1)^{\mathbf{v}_1} (L_2)^{\mathbf{v}_2} (L_3)^{\mathbf{v}_3} d\Omega = \frac{\mathbf{v}_1 ! \mathbf{v}_2 ! \mathbf{v}_3 !}{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 2)!} 2mes\Omega_m ,$$

$$\int_{\Gamma} (L_i)^{\mathbf{v}_i} (L_j)^{\mathbf{v}_j} dS = \frac{\mathbf{v}_i ! \mathbf{v}_j !}{(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + 1)!} mes\Gamma , \quad i \neq j ,$$
(2.91)

причем под 0! понимается значение 1.

Итак, получим вклады от треугольника Ω_m в глобальную матрицу конечнообъемной СЛАУ. При этом локальные матрицы будем строить отдельно для каждого из членов левой части интегробалансного соотношения (2.81): для

члена $-\int_{\widetilde{\Gamma}_k} p \frac{\partial u}{\partial n} dS$ локальную матрицу будем обозначать через \hat{B} , а для $\int_{\widetilde{\Omega}_k} \gamma u d\Omega$ – через \hat{C} .

Значение компонент матрицы \hat{B} могут быть получены из следующего соотношения:

$$\hat{B}\hat{U} = \begin{pmatrix} -\int_{\hat{\Gamma}_{12}} p \frac{\partial u}{\partial n_{12}} dS + \int_{\hat{\Gamma}_{31}} p \frac{\partial u}{\partial n_{31}} dS \\ \int_{\hat{\Gamma}_{12}} p \frac{\partial u}{\partial n_{12}} dS - \int_{\hat{\Gamma}_{23}} p \frac{\partial u}{\partial n_{23}} dS \\ -\int_{\hat{\Gamma}_{31}} p \frac{\partial u}{\partial n_{31}} dS + \int_{\hat{\Gamma}_{23}} p \frac{\partial u}{\partial n_{23}} dS \end{pmatrix}, \qquad (2.92)$$

где \vec{n}_{12} , \vec{n}_{23} и \vec{n}_{31} – единичные нормали к границам $\hat{\Gamma}_{12}$, $\hat{\Gamma}_{23}$ и $\hat{\Gamma}_{31}$ соответственно, причем нормаль \vec{n}_{12} направлена от первой (в локальной нумерации) вершины треугольника Ω_m ко второй и поэтому она внешняя по отношению к конечному объему $\tilde{\Omega}_{m_1}$ и внутренняя по отношению к $\tilde{\Omega}_{m_2}$, нормаль \vec{n}_{23} направлена от второй вершины Ω_m к третьей и поэтому она внешняя по отношению к конечному объему $\tilde{\Omega}_{m_2}$ и внутренняя по отношению к $\tilde{\Omega}_{m_3}$, нормаль \vec{n}_{31} направлена от третьей вершины Ω_m к третьей и поэтому она внешняя по отношению к конечному объему $\tilde{\Omega}_{m_2}$ и внутренняя по отношению к $\tilde{\Omega}_{m_3}$, нормаль \vec{n}_{31} направлена от третьей вершины Ω_m к первой и поэтому она внешняя по отношению к конечному объему $\tilde{\Omega}_{m_3}$ и внутренняя по отношению к $\tilde{\Omega}_{m_1}$, т.е. направления нормалей \vec{n}_{12} , \vec{n}_{23} и \vec{n}_{31} совпадают с направлением обхода вершин треугольника Ω_m в локальной нумерации (см. рис. 16). В связи с этим в (2.92) изменены знаки у вторых слагаемых первой и третьей строк и у первого слагаемого второй строки, так как в соответствующих интегробалансных соотношениях для конечных объемов $\tilde{\Omega}_{m_1}$, $\tilde{\Omega}_{m_2}$ и $\tilde{\Omega}_{m_3}$ (см. (2.81)) в интегралах по их границам

вида
$$-\int_{\tilde{\Gamma}_k} p \frac{\partial u}{\partial n} dS$$
 производная *и* должна быть взята по внешней по отноше-

нию к рассматриваемому конечному объему нормали к $\tilde{\Gamma}_k$.

Получим аппроксимацию входящих в соотношение (2.92) интегралов с учетом того, что искомая функция u на рассматриваемом треугольнике Ω_m заменяется своим линейным интерполянтом, который может быть представлен в виде линейной комбинации L-координат

$$u = \hat{u}_1 L_1 + \hat{u}_2 L_2 + \hat{u}_3 L_3, \tag{2.93}$$

где функции L_i представляются в виде (2.86), а все их коэффициенты α_j^i могут быть получены из соотношений (2.89)-(2.90).

Представим производные $\frac{\partial u}{\partial n_{12}}$, $\frac{\partial u}{\partial n_{23}}$ и $\frac{\partial u}{\partial n_{31}}$ в виде скалярного произведения градиента функции на соответствующие векторы единичных нормалей

 $\frac{\partial u}{\partial n_{12}} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{n}_{12}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_{22}} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{n}_{23}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_{24}} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{n}_{31}. \quad (2.94)$

Получим выражения для компонент векторов нормалей \vec{n}_{12} , \vec{n}_{23} и \vec{n}_{31} . Сначала построим вектор $\vec{\tau}_{12}$, касательный к границе $\hat{\Gamma}_{12}$. Этот вектор может быть получен как вектор, направленный из середины ребра, соединяющего вершины треугольника Ω_m с локальными номерами 1 и 2, в вершину Ω_m с локальным номером 3 (см. рис. 16)

$$\vec{\tau}_{12} = \left(\hat{x}_3 - \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2}, \hat{y}_3 - \frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_2}{2}\right).$$
(2.95)

ортогональным к $\vec{\tau}_{12}$, Очевидно. что вектором, будет вектор $\left(\hat{y}_3 - \frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_2}{2}, -\hat{x}_3 + \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2}\right)$ (в чем легко убедиться непосредственным скалярным умножением $\vec{\tau}_{12}$ на этот вектор), длина которого будет равна длине вектора $\vec{\tau}_{12}$. Тогда, чтобы получить единичную нормаль к $\hat{\Gamma}_{12}$, достаточно пронормировать этот вектор: $\frac{1}{|\vec{\tau}_{12}|} \left(\hat{y}_3 - \frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_2}{2}, -\hat{x}_3 + \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2} \right)$, где $|\vec{\tau}_{12}|$ – длина вектора $\vec{\tau}_{12}$. Нетрудно также убедиться, что полученный вектор образует с вектором $\vec{\tau}_{12}$ правую тройку и направление его совпадает с направлением внешней по отношению к конечному объему $\tilde{\Omega}_{m_1}$ нормали к границе $\hat{\Gamma}_{12}$ только тогда, когда локальная нумерация вершин треугольника Ω_m соответствует правому обходу (в противном же случае внешняя по отношению к $\tilde{\Omega}_{m_1}$ нормаль будет направлена в противоположную сторону). Таким образом, для построения нормали \vec{n}_{12} нам необходимо знать, какому обходу (правому или левому) соответствует локальная нумерация вершин треугольника Ω_m . Эта проблема может быть легко решена с помощью знака величины $\det D$, определяемой соотношением (2.89). Действительно, по соотношению (2.89) легко видеть, что величина $\det D$ фактически является длиной вектора, полученного как векторное произведение трехмерных векторов $(\hat{x}_2 - \hat{x}_1, \hat{y}_2 - \hat{y}_1, 0)$ и $(\hat{x}_3 - \hat{x}_1, \hat{y}_3 - \hat{y}_1, 0)$, и при этом направление обхода этих векторов (в векторном произведении) полностью соответствует направлению обхода вершин треугольника Ω_m по возрастанию их номеров в локальной нумерации. Поэтому при правом обходе вершин треугольника $\Omega_m \det D > 0$, а при левом $\det D < 0$, и знак $\det D$ (который мы будем обозначать $sign(\det D)$) фактически может служить индикатором направления обхода вершин треугольника Ω_m . Исходя из этого, единичная нормаль \vec{n}_{12} к границе $\hat{\Gamma}_{12}$, внешняя по отношению к конечному объему $\tilde{\Omega}_{m_1}$, имеет вид

$$\vec{n}_{12} = \frac{sign(\det D)}{\left|\vec{\tau}_{12}\right|} \left(\hat{y}_3 - \frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_2}{2}, -\hat{x}_3 + \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2}\right).$$
(2.96)

Аналогично могут быть получены выражения для остальных двух нормалей \vec{n}_{23} и \vec{n}_{31} :

$$\vec{\tau}_{23} = \left(\hat{x}_1 - \frac{\hat{x}_2 + \hat{x}_3}{2}, \ \hat{y}_1 - \frac{\hat{y}_2 + \hat{y}_3}{2}\right), \tag{2.97}$$

$$\vec{n}_{23} = \frac{sign(\det D)}{\left|\vec{\tau}_{23}\right|} \left(\hat{y}_1 - \frac{\hat{y}_2 + \hat{y}_3}{2}, -\hat{x}_1 + \frac{\hat{x}_2 + \hat{x}_3}{2}\right),$$
(2.98)

$$\vec{\tau}_{31} = \left(\hat{x}_2 - \frac{\hat{x}_3 + \hat{x}_1}{2}, \ \hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_3 + \hat{y}_1}{2}\right), \tag{2.99}$$

$$\vec{n}_{31} = \frac{sign(\det D)}{\left|\vec{\tau}_{31}\right|} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_3 + \hat{y}_1}{2}, -\hat{x}_2 + \frac{\hat{x}_3 + \hat{x}_1}{2}\right).$$
(2.100)

Теперь, чтобы воспользоваться соотношениями (2.94) для вычисления производных u по нормалям \vec{n}_{12} , \vec{n}_{23} и \vec{n}_{31} , нам необходимо получить аппроксимирующие выражения для компонент $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ вектора gradu. Поскольку u на треугольнике Ω_m аппроксимируется с помощью соотношения

скольку u на треугольнике Ω_m аппроксимируется с помощью соотношения (2.93), то с учетом (2.86) и (2.90)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \hat{u}_1 \frac{\partial L_1}{\partial x} + \hat{u}_2 \frac{\partial L_2}{\partial x} + \hat{u}_3 \frac{\partial L_3}{\partial x} = \hat{u}_1 \alpha_1^1 + \hat{u}_2 \alpha_1^2 + \hat{u}_3 \alpha_1^3 =
= \frac{1}{\det D} (\hat{u}_1 (\hat{y}_2 - \hat{y}_3) + \hat{u}_2 (\hat{y}_3 - \hat{y}_1) + \hat{u}_3 (\hat{y}_1 - \hat{y}_2)),$$
(2.101)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \hat{u}_1 \frac{\partial L_1}{\partial y} + \hat{u}_2 \frac{\partial L_2}{\partial y} + \hat{u}_3 \frac{\partial L_3}{\partial y} = \hat{u}_1 \alpha_2^1 + \hat{u}_2 \alpha_2^2 + \hat{u}_3 \alpha_2^3 = = -\frac{1}{\det D} (\hat{u}_1 (\hat{x}_2 - \hat{x}_3) + \hat{u}_2 (\hat{x}_3 - \hat{x}_1) + \hat{u}_3 (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)) .$$
(2.102)

Введем обозначения

$$\hat{u}^{y} = \hat{u}_{1}(\hat{y}_{2} - \hat{y}_{3}) + \hat{u}_{2}(\hat{y}_{3} - \hat{y}_{1}) + \hat{u}_{3}(\hat{y}_{1} - \hat{y}_{2}) , \qquad (2.103)$$

$$\hat{u}^{x} = \hat{u}_{1}(\hat{x}_{2} - \hat{x}_{3}) + \hat{u}_{2}(\hat{x}_{3} - \hat{x}_{1}) + \hat{u}_{3}(\hat{x}_{1} - \hat{x}_{2}) .$$
(2.104)

С учетом этих обозначений соотношения (2.101) и (2.102) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\det D} \hat{u}^y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\det D} \hat{u}^x.$$
(2.105)

Подставляя (2.105), (2.96), (2.98) и (2.100) в (2.94), получим

$$\frac{\partial u}{\partial n_{12}} = \frac{sign(\det D)}{\left|\vec{\tau}_{12}\right|\det D} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{3} - \frac{\hat{y}_{1} + \hat{y}_{2}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{3} - \frac{\hat{x}_{1} + \hat{x}_{2}}{2} \right) \right),$$
(2.106)

$$\frac{\partial u}{\partial n_{23}} = \frac{sign(\det D)}{\left|\vec{\tau}_{23}\right|\det D} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{1} - \frac{\hat{y}_{2} + \hat{y}_{3}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{1} - \frac{\hat{x}_{2} + \hat{x}_{3}}{2} \right) \right), \tag{2.107}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_{31}} = \frac{sign(\det D)}{\left|\vec{\tau}_{31}\right|\det D} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{2} - \frac{\hat{y}_{3} + \hat{y}_{1}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{2} - \frac{\hat{x}_{3} + \hat{x}_{1}}{2} \right) \right).$$
(2.108)

Полагая, что параметр *p* на треугольнике Ω_m заменяется своим средним значением \overline{p} и учитывая, что $\frac{sign(\det D)}{\det D} = \frac{1}{|\det D|}$ и то, что аппроксимации (2.106)-(2.108) производных $\frac{\partial u}{\partial n_{12}}$, $\frac{\partial u}{\partial n_{23}}$ и $\frac{\partial u}{\partial n_{31}}$ на Ω_m не зависят от переменных *x* и *y*, а также то, что $\int_{\Gamma_{12}} dS = mes\hat{\Gamma}_{12} = \frac{|\vec{\tau}_{12}|}{3}$, $\int_{\Gamma_{23}} dS = mes\hat{\Gamma}_{23} = \frac{|\vec{\tau}_{23}|}{3}$ и

 $\int dS = mes \hat{\Gamma}_{31} = \frac{\left|\vec{\tau}_{31}\right|}{3},$ получим выражения для отдельных слагаемых компонент

вектора, стоящего в правой части соотношения (2.92):

$$\int_{\hat{\Gamma}_{12}} p \frac{\partial u}{\partial n_{12}} dS = \frac{\overline{p} \operatorname{sign}(\det D)}{|\vec{\tau}_{12}|\det D} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{3} - \frac{\hat{y}_{1} + \hat{y}_{2}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{3} - \frac{\hat{x}_{1} + \hat{x}_{2}}{2} \right) \right) \operatorname{mes} \hat{\Gamma}_{12} = \\ = \frac{\overline{p}}{|\vec{\tau}_{12}| \cdot |\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{3} - \frac{\hat{y}_{1} + \hat{y}_{2}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{3} - \frac{\hat{x}_{1} + \hat{x}_{2}}{2} \right) \right) \frac{|\vec{\tau}_{12}|}{3} = \\ = \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{3} - \frac{\hat{y}_{1} + \hat{y}_{2}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{3} - \frac{\hat{x}_{1} + \hat{x}_{2}}{2} \right) \right), \qquad (2.109)$$

$$\begin{split} &\int_{\hat{\Gamma}_{23}} p \frac{\partial u}{\partial n_{23}} dS = \frac{\overline{p} \, sign(\det D)}{|\vec{\tau}_{23}|\det D} \bigg(\hat{u}^{y} \bigg(\hat{y}_{1} - \frac{\hat{y}_{2} + \hat{y}_{3}}{2} \bigg) + \hat{u}^{x} \bigg(\hat{x}_{1} - \frac{\hat{x}_{2} + \hat{x}_{3}}{2} \bigg) \bigg) mes \hat{\Gamma}_{23} = \\ &= \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \bigg(\hat{u}^{y} \bigg(\hat{y}_{1} - \frac{\hat{y}_{2} + \hat{y}_{3}}{2} \bigg) + \hat{u}^{x} \bigg(\hat{x}_{1} - \frac{\hat{x}_{2} + \hat{x}_{3}}{2} \bigg) \bigg), \end{split}$$
(2.110)
$$&\int_{\hat{\Gamma}_{31}} p \frac{\partial u}{\partial n_{31}} dS = \frac{\overline{p} \, sign(\det D)}{|\vec{\tau}_{31}|\det D} \bigg(\hat{u}^{y} \bigg(\hat{y}_{2} - \frac{\hat{y}_{3} + \hat{y}_{1}}{2} \bigg) + \hat{u}^{x} \bigg(\hat{x}_{2} - \frac{\hat{x}_{3} + \hat{x}_{1}}{2} \bigg) \bigg) mes \hat{\Gamma}_{31} = \\ &= \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \bigg(\hat{u}^{y} \bigg(\hat{y}_{2} - \frac{\hat{y}_{3} + \hat{y}_{1}}{2} \bigg) + \hat{u}^{x} \bigg(\hat{x}_{2} - \frac{\hat{x}_{3} + \hat{x}_{1}}{2} \bigg) \bigg). \end{aligned}$$
(2.111)

С помощью соотношений (2.109)-(2.111) легко могут быть получены выражения для компонент вектора, стоящего в правой части соотношения (2.92):

$$-\int_{\hat{\Gamma}_{12}} p \frac{\partial u}{\partial n_{12}} dS + \int_{\hat{\Gamma}_{31}} p \frac{\partial u}{\partial n_{31}} dS = -\frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{3} - \frac{\hat{y}_{1} + \hat{y}_{2}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{3} - \frac{\hat{x}_{1} + \hat{x}_{2}}{2} \right) \right) + \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{2} - \frac{\hat{y}_{3} + \hat{y}_{1}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{2} - \frac{\hat{x}_{3} + \hat{x}_{1}}{2} \right) \right) = \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(-\hat{y}_{3} + \frac{\hat{y}_{1} + \hat{y}_{2}}{2} + \hat{y}_{2} + \frac{\hat{y}_{3} + \hat{y}_{1}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(-\hat{x}_{3} + \frac{\hat{x}_{1} + \hat{x}_{2}}{2} + \hat{x}_{2} - \frac{\hat{x}_{3} + \hat{x}_{1}}{2} \right) \right) = \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \cdot \frac{3}{2} (\hat{y}_{2} - \hat{y}_{3}) + \hat{u}^{x} \cdot \frac{3}{2} (\hat{x}_{2} - \hat{x}_{3}) \right) = \frac{\overline{p}}{2|\det D|} \left(\hat{u}^{y} (\hat{y}_{2} - \hat{y}_{3}) + \hat{u}^{x} (\hat{x}_{2} - \hat{x}_{3}) \right), \qquad (2.112)$$

$$\int_{\hat{\Gamma}_{12}} p \frac{\partial u}{\partial n_{12}} dS - \int_{\hat{\Gamma}_{23}} p \frac{\partial u}{\partial n_{23}} dS = \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{3} - \frac{\hat{y}_{1} + \hat{y}_{2}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{3} - \frac{\hat{x}_{1} + \hat{x}_{2}}{2} \right) \right) - \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{1} - \frac{\hat{y}_{2} + \hat{y}_{3}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{1} - \frac{\hat{x}_{2} + \hat{x}_{3}}{2} \right) \right) = \frac{\overline{p}}{2|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{3} - \hat{y}_{1} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{3} - \hat{x}_{1} \right) \right),$$
(2.113)

$$-\int_{\hat{\Gamma}_{31}} p \frac{\partial u}{\partial n_{31}} dS + \int_{\hat{\Gamma}_{23}} p \frac{\partial u}{\partial n_{23}} dS = -\frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{2} - \frac{\hat{y}_{3} + \hat{y}_{1}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{2} - \frac{\hat{x}_{3} + \hat{x}_{1}}{2} \right) \right) + \frac{\overline{p}}{3|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{1} - \frac{\hat{y}_{2} + \hat{y}_{3}}{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{1} - \frac{\hat{x}_{2} + \hat{x}_{3}}{2} \right) \right) = \frac{\overline{p}}{2|\det D|} \left(\hat{u}^{y} \left(\hat{y}_{1} - \hat{y}_{2} \right) + \hat{u}^{x} \left(\hat{x}_{1} - \hat{x}_{2} \right) \right).$$
(2.114)

Введем обозначения

$$\Delta \hat{x}_{12} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \quad \Delta \hat{x}_{23} = \hat{x}_2 - \hat{x}_3 \quad \Delta \hat{x}_{31} = \hat{x}_3 - \hat{x}_1 ,$$

$$\Delta \hat{y}_{12} = \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \quad \Delta \hat{y}_{23} = \hat{y}_2 - \hat{y}_3 \quad \Delta \hat{y}_{31} = \hat{y}_3 - \hat{y}_1 .$$
(2.115)

Подставляя выражения (2.112)-(2.114) в (2.92), с учетом обозначений (2.103)-(2.104) и (2.115) получим

$$\hat{B}\hat{U} = \frac{\overline{p}}{2|\det D|} \begin{pmatrix} (\Delta\hat{x}_{23})^2 + (\Delta\hat{y}_{23})^2)\hat{u}_1 + (\Delta\hat{x}_{23}\cdot\Delta\hat{x}_{31} + \Delta\hat{y}_{23}\cdot\Delta\hat{y}_{31})\hat{u}_2 + (\Delta\hat{x}_{23}\cdot\Delta\hat{x}_{12} + \Delta\hat{y}_{23}\cdot\Delta\hat{y}_{12})\hat{u}_3 \\ (\Delta\hat{x}_{31}\cdot\Delta\hat{x}_{23} + \Delta\hat{y}_{31}\cdot\Delta\hat{y}_{23})\hat{u}_1 + ((\Delta\hat{x}_{31})^2 + (\Delta\hat{y}_{31})^2)\hat{u}_2 + (\Delta\hat{x}_{31}\cdot\Delta\hat{x}_{12} + \Delta\hat{y}_{31}\cdot\Delta\hat{y}_{12})\hat{u}_3 \\ (\Delta\hat{x}_{12}\cdot\Delta\hat{x}_{23} + \Delta\hat{y}_{12}\cdot\Delta\hat{y}_{23})\hat{u}_1 + (\Delta\hat{x}_{12}\cdot\Delta\hat{x}_{31} + \Delta\hat{y}_{12}\cdot\Delta\hat{y}_{31})\hat{u}_2 + ((\Delta\hat{x}_{12})^2 + (\Delta\hat{y}_{12})^2)\hat{u}_3 \end{pmatrix}$$

т.е. локальная матрица \hat{B} имеет вид

$$\hat{B} = \frac{\overline{p}}{2|\det D|} \begin{pmatrix} (\Delta \hat{x}_{23})^2 + (\Delta \hat{y}_{23})^2 & \Delta \hat{x}_{23} \cdot \Delta \hat{x}_{31} + \Delta \hat{y}_{23} \cdot \Delta \hat{y}_{31} & \Delta \hat{x}_{23} \cdot \Delta \hat{x}_{12} + \Delta \hat{y}_{23} \cdot \Delta \hat{y}_{12} \\ \Delta \hat{x}_{31} \cdot \Delta \hat{x}_{23} + \Delta \hat{y}_{31} \cdot \Delta \hat{y}_{23} & (\Delta \hat{x}_{31})^2 + (\Delta \hat{y}_{31})^2 & \Delta \hat{x}_{31} \cdot \Delta \hat{x}_{12} + \Delta \hat{y}_{31} \cdot \Delta \hat{y}_{12} \\ \Delta \hat{x}_{12} \cdot \Delta \hat{x}_{23} + \Delta \hat{y}_{12} \cdot \Delta \hat{y}_{23} & \Delta \hat{x}_{12} \cdot \Delta \hat{x}_{31} + \Delta \hat{y}_{12} \cdot \Delta \hat{y}_{31} & (\Delta \hat{x}_{12})^2 + (\Delta \hat{y}_{12})^2 \end{pmatrix}, (2.116)$$

откуда видно, что для любого треугольника Ω_m его локальная матрица \hat{B} симметрична.

Значения компонент локальной матрицы \hat{C} треугольника Ω_m могут быть получены из соотношения

$$\hat{C}\hat{U} = \begin{pmatrix} \int \gamma u \, d\Omega \\ \hat{\Omega}_1 \\ \int \gamma u \, d\Omega \\ \hat{\Omega}_2 \\ \int \gamma u \, d\Omega \\ \hat{\Omega}_3 \end{pmatrix}.$$
(2.117)

Получим выражения для компонент вектора, стоящего в правой части соотношения (2.117). Заменяя функцию u ее линейным интерполянтом (2.93), определенным на треугольнике Ω_m , а параметр γ – его средним на Ω_m значением $\overline{\gamma}$, для первой компоненты вектора из правой части соотношения (2.117) получим

$$\int_{\hat{\Omega}_1} \gamma u \, d\Omega = \overline{\gamma} \left(\hat{u}_1 \int_{\hat{\Omega}_1} L_1 d\Omega + \hat{u}_2 \int_{\hat{\Omega}_1} L_2 d\Omega + \hat{u}_3 \int_{\hat{\Omega}_1} L_3 d\Omega \right).$$
(2.118)



Разобьем часть $\hat{\Omega}_1$ конечного объема $\tilde{\Omega}_{m_1}$ на два треугольника $\hat{\Omega}'_1$ и $\hat{\Omega}''_1$ так, как это показано на рис. 17 (т.е. ребром, соединяющем вершину с локаль-

ным номером 1 с центром масс треугольника Ω_m). Тогда интеграл по $\hat{\Omega}_1$ в соотношении (2.118) может быть представлен в виде суммы интегралов по треугольникам $\hat{\Omega}'_1$ и $\hat{\Omega}''_1$. Однако при вычислении $\int_{\hat{\Omega}'_1} L_1 d\Omega$ мы не можем напрямую

применить формулы (2.91), так как в этом интеграле в качестве подынтегрального выражения стоит *L*-координата треугольника Ω_m , а не *L*-координата треугольника $\hat{\Omega}'_1$, по которому проводится интегрирование. Поэтому, чтобы воспользоваться формулами (2.91) для вычисления $\int_{\Omega_1} L_1 d\Omega$, представим *L*-координату L_1 треугольника Ω_m через *L*-координаты L'_1 , L'_2 и L'_3 треугольника $\hat{\Omega}'_1$. Для этого достаточно получить значения L_1 в трех вершинах треугольника $\hat{\Omega}'_1$: $L_1=1$ в вершине $\{\hat{x}_1, \hat{y}_1\}$, $L_1=\frac{1}{2}$ в вершине $\{\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_3}{2}, \frac{\hat{y}_1+\hat{y}_3}{2}\}$ и $L_1=\frac{1}{3}$ в вершине $\{\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2+\hat{x}_3}{3}, \frac{\hat{y}_1+\hat{y}_2+\hat{y}_3}{3}\}$. В этом легко убедиться, учитывая, что L_1 линейна по своим переменным *x* и *y* и равна единице в вершине $\{\hat{x}_1, \hat{y}_1\}$ и нулю в вершинах $\{\hat{x}_2, \hat{y}_2\}$ и $\{\hat{x}_3, \hat{y}_3\}$ треугольника Ω_m , т.е.

$$L_{1}\left(\frac{\hat{x}_{1}+\hat{x}_{3}}{2},\frac{\hat{y}_{1}+\hat{y}_{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}L_{1}(\hat{x}_{1},\hat{y}_{1}) + \frac{1}{2}L_{1}(\hat{x}_{2},\hat{y}_{2}) = \frac{1}{2},$$

$$L_{1}\left(\frac{\hat{x}_{1}+\hat{x}_{2}+\hat{x}_{3}}{3},\frac{\hat{y}_{1}+\hat{y}_{2}+\hat{y}_{3}}{3}\right) = \frac{1}{3}L_{1}(\hat{x}_{1},\hat{y}_{1}) + \frac{1}{3}L_{1}(\hat{x}_{2},\hat{y}_{2}) + \frac{1}{3}L_{1}(\hat{x}_{3},\hat{y}_{3}) = \frac{1}{3}.$$

И поскольку L_1 является линейной функцией на треугольнике $\hat{\Omega}'_1$ (так как $\hat{\Omega}'_1$ является частью Ω_m), то

$$L_1 = L_1' + L_2' \frac{1}{2} + L_3' \frac{1}{3}.$$
 (2.119)

Аналогично представляются на треугольнике $\hat{\Omega}'_1$ *L*-координаты L_2 и L_3 треугольника Ω_m через *L*-координаты L'_1 , L'_2 и $L_1 = L'_1 + L'_2 \frac{1}{2} + L'_3 \frac{1}{3}$ треугольника $\hat{\Omega}'_1$

$$L_2 = L'_1 \cdot 0 + L'_2 \cdot 0 + L'_3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}L'_3, \qquad (2.120)$$

$$L_3 = L'_1 \cdot 0 + L'_2 \frac{1}{2} + L'_3 \frac{1}{3} = \frac{1}{2}L'_2 + \frac{1}{3}L'_3.$$
(2.121)

Значения же интегралов от функций L'_1 , L'_2 и $L_1 = L'_1 + L'_2 \frac{1}{2} + L'_3 \frac{1}{3}$ по треугольнику $\hat{\Omega}'_1$ уже могут быть получены с использованием формул (2.91):

$$\int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{1}' d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_{1}'} (L_{1}')^{1} (L_{2}')^{0} (L_{3}')^{0} d\Omega = \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2mes\hat{\Omega}_{1}' = \frac{1}{3}mes\hat{\Omega}_{1}', \quad (2.122)$$

$$\int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{2}' d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_{1}'} (L_{1}')^{0} (L_{2}')^{1} (L_{3}')^{0} d\Omega = \frac{0!! 0!}{(0+1+0+2)!} 2mes\hat{\Omega}_{1}' = \frac{1}{3}mes\hat{\Omega}_{1}', \quad (2.123)$$

$$\int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{3}' d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_{1}'} (L_{2}')^{0} (L_{2}')^{0} (L_{3}')^{1} d\Omega = \frac{0!0!!!}{(0+0+1+2)!} 2mes\hat{\Omega}_{1}' = \frac{1}{3}mes\hat{\Omega}_{1}' . \quad (2.124)$$

С учетом соотношений (2.119)-(2.124), выражение (2.118) преобразуется к виду

$$\begin{split} &\int_{\hat{\Omega}_{1}'} \gamma u \, d\Omega = \overline{\gamma} \Biggl(\hat{u}_{1} \Biggl(\int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{1}' d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{2}' d\Omega + \frac{1}{3} \int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{3}' d\Omega \Biggr) + \hat{u}_{2} \cdot \frac{1}{3} \int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{3}' d\Omega + \\ &+ \hat{u}_{3} \Biggl(\frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{2}' d\Omega + \frac{1}{3} \int_{\hat{\Omega}_{1}'} L_{3}' d\Omega \Biggr) \Biggr) = \overline{\gamma} \cdot \frac{1}{3} mes \hat{\Omega}_{1}' \Biggl(\hat{u}_{1} \cdot \Biggl(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Biggr) + \hat{u}_{2} \cdot \frac{1}{3} + \hat{u}_{3} \cdot \Biggl(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Biggr) \Biggr) = \\ &= \frac{\overline{\gamma}}{18} mes \hat{\Omega}_{1}' (11 \hat{u}_{1} + 2 \hat{u}_{2} + 5 \hat{u}_{3}) . \end{split}$$
(2.125)

Нетрудно убедиться, что площадь треугольника $\hat{\Omega}'_1$ составляет ровно шестую часть площади треугольника Ω_m . Действительно, площадь треугольника $\hat{\Omega}'_1 \cup \hat{\Omega}''_3$ (см. рис. 17)составляет ровно третью часть площади треугольника Ω_m , так как треугольники $\hat{\Omega}'_1 \cup \hat{\Omega}''_3$ и Ω_m имеют одинаковое основание в виде ребра, соединяющего вершины $\{\hat{x}_1, \hat{y}_1\}$ и $\{\hat{x}_3, \hat{y}_3\}$, а их высоты соотносятся друг с другом как 1 к 3 (напомним, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую из медиан на две части, одна из которых составляет $\frac{1}{3}$, а другая $\frac{2}{3}$ от длины медианы). Таким образом, $mes(\hat{\Omega}'_1 \cup \hat{\Omega}''_3) = \frac{1}{3}mes\Omega_m$. Но треугольники $\hat{\Omega}'_1$ и $\hat{\Omega}''_3$ имеют равную площадь, так как их основания, являющиеся разными половинками ребра с вершинами $\{\hat{x}_1, \hat{y}_1\}$ и $\{\hat{x}_3, \hat{y}_3\}$, имеют одинаковую длину, а высоты этих треугольников при таком выборе оснований просто совпадают (см. рис. 17). Таким образом, мы доказали, что площади каждого из треугольников

 $\hat{\Omega}'_{1}$ и $\hat{\Omega}''_{3}$ составляют шестую часть площади треугольника Ω_{m} . Аналогично доказывается, что и площади треугольников $\hat{\Omega}''_{1}$, $\hat{\Omega}'_{2}$, $\hat{\Omega}''_{2}$ и $\hat{\Omega}'_{3}$ составляют ровно шестую часть от $mes\Omega_{m}$, и тогда, с учетом соотношения (2.88),

$$mes\hat{\Omega}'_{1} = mes\hat{\Omega}''_{1} = mes\hat{\Omega}'_{2} = mes\hat{\Omega}''_{2} = mes\hat{\Omega}''_{3} = mes\hat{\Omega}''_{3} =$$

$$= \frac{1}{6}mes\Omega_{m} = \frac{1}{12}|\det D| , \qquad (2.126)$$

где $\det D$ определяется соотношением (2.89).

Используя соотношение (2.126), приводим выражение (2.125) к виду

$$\int_{\hat{\Omega}_{1}'} \gamma u \, d\Omega = \frac{\overline{\gamma} |\det D|}{216} (1 \, 1 \hat{u}_{1} + 2 \hat{u}_{2} + 5 \hat{u}_{3}). \tag{2.127}$$

Аналогично могут быть получены выражения интегралов от функции γu по треугольникам $\hat{\Omega}''_1$, $\hat{\Omega}'_2$, $\hat{\Omega}''_2$, $\hat{\Omega}''_3$ и $\hat{\Omega}''_3$:

$$\int_{\hat{\Omega}_{1}''} \gamma u \, d\Omega = \frac{\overline{\gamma} |\det D|}{216} (11\hat{u}_{1} + 5\hat{u}_{2} + 2\hat{u}_{3}), \tag{2.128}$$

$$\int_{\hat{\Omega}_{2}} \gamma u \, d\Omega = \frac{\overline{\gamma} |\det D|}{216} (5\hat{u}_{1} + 11\hat{u}_{2} + 2\hat{u}_{3}), \tag{2.129}$$

$$\int_{\hat{\Omega}_{2}''} \gamma u \, d\Omega = \frac{\overline{\gamma} |\det D|}{216} (2\hat{u}_{1} + 11\hat{u}_{2} + 5\hat{u}_{3}), \tag{2.130}$$

$$\int_{\hat{\Omega}_{3}'} \gamma u \, d\Omega = \frac{\overline{\gamma} |\det D|}{216} (2\hat{u}_{1} + 5\hat{u}_{2} + 11\hat{u}_{3}), \tag{2.131}$$

$$\int_{\hat{\Omega}_{3}''} \gamma u \, d\Omega = \frac{\overline{\gamma} |\det D|}{216} (5\hat{u}_{1} + 2\hat{u}_{2} + 11\hat{u}_{3}). \tag{2.132}$$

Из соотношений (2.127)-(2.132) легко получаем выражения для компонент из правой части соотношения (2.117)

$$\hat{C}\hat{U} = \frac{\overline{\gamma}|\det D|}{216} \begin{pmatrix} 22\hat{u}_1 + 7\hat{u}_2 + 7\hat{u}_3\\ 7\hat{u}_1 + 22\hat{u}_2 + 7\hat{u}_3\\ 7\hat{u}_1 + 7\hat{u}_2 + 22\hat{u}_3 \end{pmatrix} = \frac{\overline{\gamma}|\det D|}{216} \begin{pmatrix} 22 & 7 & 7\\ 7 & 22 & 7\\ 7 & 7 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3 \end{pmatrix},$$
(2.133)

т.е. локальная матрица \hat{C} имеет вид

$$\hat{C} = \frac{\overline{\gamma}|\det D|}{216} \begin{pmatrix} 22 & 7 & 7\\ 7 & 22 & 7\\ 7 & 7 & 22 \end{pmatrix}.$$
(2.134)

Значения компонент локального вектора \hat{G} треугольника Ω_m могут быть получены из соотношения

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \int f \, d\Omega \\ \hat{\Omega}_1 \\ \int f \, d\Omega \\ \hat{\Omega}_2 \\ \int f \, d\Omega \\ \hat{\Omega}_3 \end{pmatrix}.$$
(2.135)

При замене функции f её линейным интерполянтом $\hat{f}_1L_1 + \hat{f}_2L_2 + \hat{f}_3L_3$ (\hat{f}_1 , \hat{f}_2 и \hat{f}_3 – значения f в вершинах треугольника Ω_m) локальный вектор \hat{G} примет вид

$$\hat{G} = \frac{\left|\det D\right|}{216} \begin{pmatrix} 22\hat{f}_1 + 7\hat{f}_2 + 7\hat{f}_3\\ 7\hat{f}_1 + 22\hat{f}_2 + 7\hat{f}_3\\ 7\hat{f}_1 + 7\hat{f}_2 + 22\hat{f}_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.136)$$

в чем легко убедится, сравнивая выражения (2.117) и (2.135) и учитывая соотношение (2.133).

Аналогично вычисляются вклады в конечнообъемную СЛАУ от краевых условий второго и третьего рода. Если на ребре Γ_m , соединяющем вершины с глобальными номерами m_1 и m_2 , задано краевое условие третьего рода, то вклад от него в m_1 -е уравнение конечнообъемной СЛАУ определяется интегралом $\int \beta (u-u_{\beta}) dS$, а в m_2 -е – интегралом $\int \beta (u-u_{\beta}) dS$, где Γ_{m_1} – половинка ребра Γ_{m_2} Γ_m , заключенная между его серединой и вершиной с глобальным номером m_1 , а Γ_{m_2} – половинка ребра Γ_m , заключенная между его серединой и вершиной с глобальным номером m_2 . Локальная матрица \hat{A}^{S_3} и локальный вектор \hat{G}^{S_3} ребра Γ_m с заданным на нем краевым условием третьего рода могут быть получены из соотношения

$$\hat{A}^{S_3}\hat{U} - \hat{G}^{S_3} = \begin{pmatrix} \int \beta(u - u_\beta) dS \\ \Gamma_{m_1} \\ \\ \int \beta(u - u_\beta) dS \\ \Gamma_{m_2} \end{pmatrix}.$$
(2.137)

Будем считать, что коэффициент β постоянен на Γ_m , а функции u и u_β линейно меняются на Γ_m от значений \hat{u}_1 и $\hat{u}_{\beta 1}$ в узле с глобальным номером m_1 до значений \hat{u}_2 и $\hat{u}_{\beta 2}$ в узле с глобальным номером m_2 . Тогда функция u линейно меняется на Γ_{m_1} от значения \hat{u}_1 в вершине с номером m_1 до значения $\frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2}$ в середине ребра Γ_m , и поэтому по формуле трапеций получаем

$$\int_{\Gamma_{m_{1}}} \beta u \, dS = \beta \frac{1}{2} \left(\hat{u}_{1} + \frac{\hat{u}_{1} + \hat{u}_{2}}{2} \right) mes \Gamma_{m_{1}} = \frac{\beta mes \Gamma_{m}}{4} \left(\frac{3}{2} \hat{u}_{1} + \frac{1}{2} \hat{u}_{2} \right) =$$

$$= \frac{\beta mes \Gamma_{m}}{8} (3\hat{u}_{1} + \hat{u}_{2}). \qquad (2.138)$$

Аналогично вычисляется и интеграл от u по Γ_{m_2} , и интегралы от u_β по Γ_{m_1} и Γ_{m_2}

$$\int_{\Gamma_{m_2}} \beta u \, dS = \frac{\beta \, mes \, \Gamma_m}{8} \left(\hat{u}_1 + 3 \hat{u}_2 \right) \,, \tag{2.139}$$

$$\int_{\Gamma_{m_1}} \beta u_{\beta} dS = \frac{\beta mes \Gamma_m}{8} \left(3\hat{u}_{\beta 1} + \hat{u}_{\beta 2} \right), \qquad (2.140)$$

$$\int_{\Gamma_{m_2}} \beta u_{\beta} dS = \frac{\beta mes \Gamma_m}{8} \left(\hat{u}_{\beta 1} + 3\hat{u}_{\beta 2} \right) .$$
(2.141)

Подставляя выражения (2.138)-(2.141) в соотношение (2.137), получим

$$\begin{split} \hat{A}^{S_3}\hat{U} - \hat{G}^{S_3} &= \frac{\beta mes\Gamma_m}{8} \binom{3\hat{u}_1 + \hat{u}_2 - (3\hat{u}_{\beta 1} + \hat{u}_{\beta 2})}{\hat{u}_1 + 3\hat{u}_2 - (\hat{u}_{\beta 1} + 3\hat{u}_{\beta 2})} = \\ &= \frac{\beta mes\Gamma_m}{8} \binom{3 \ 1}{1 \ 3} \cdot \binom{\hat{u}_1}{\hat{u}_1} - \frac{\beta mes\Gamma_m}{8} \binom{3\hat{u}_{\beta 1} + \hat{u}_{\beta 2}}{\hat{u}_{\beta 1} + 3\hat{u}_{\beta 2}}, \end{split}$$

т.е. локальная матрица \hat{A}^{S_3} и локальный вектор \hat{G}^{S_3} ребра Γ_m с заданным на нем краевым условием третьего рода имеют вид

$$\hat{A}^{S_3} = \frac{\beta mes\Gamma_m}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{G}^{S_3} = \frac{\beta mes\Gamma_m}{8} \begin{pmatrix} 3\hat{u}_{\beta 1} + \hat{u}_{\beta 2}\\ \hat{u}_{\beta 1} + 3\hat{u}_{\beta 2} \end{pmatrix}.$$
(2.142)

Аналогично может быть получен локальный вектор \hat{G}^{S_2} ребра Γ_m с заданным на нем краевым условием второго рода. Предполагая, что параметр θ меняется на ребре Γ_m линейно от значения $\hat{\theta}_1$ в вершине с глобальным номером m_1 до значения $\hat{\theta}_2$ в вершине с глобальным номером m_2 , получим

$$\hat{G}^{S_2} = \frac{mes\Gamma_m}{8} \begin{pmatrix} 3\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_1 + 3\hat{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$
(2.143)

Занесение всех локальных матриц и векторов в глобальные осуществляется по соответствию локальной нумерации узлов глобальной (сама процедура занесения, как и процедура учета краевых условий первого рода, ничем не отличается от описанной в предыдущем пункте).

3. ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛИРОВОК

3.1. ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ МКЭ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ. АППРОКСИМАЦИЯ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ.

МКЭ базируется на так называемых вариационных постановках, в которых решение краевых задач заменяется минимизацией некоторого функционала. Областью определения этого функционала является гильбертово пространство функций, содержащее в качестве одного из своих элементов и решение u интересующей нас краевой задачи. Вообще говоря, с теоретической точки зрения задача нахождения решения u уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями такова: подобрать пространство функций u и класс правых частей f так, чтобы каждой функции f соответствовало единственное решение u /14/. Как только соответствие между f и u установлено, краевая задача в абстрактном смысле "решена". Разумеется, это лишь первый шаг в определении решения u, соответствующего заданной функции f. Нашей же целью является построение и исследование алгоритмов вычисления решения u по заданной f, т.е. второй шаг в определении u.

Однако для обоснования конечноэлементных алгоритмов построения численного решения необходимо сделать первый шаг: определить пространства, в которых определены f и u.

<u>Определение</u>. Будем говорить, что функция v обладает конечной энергией на Ω (или является функцией с конечной энергией), если она интегрируема на Ω с квадратом.

<u>Определение</u>. Будем называть пространством H^m множество функций v, которые вместе со всеми своими производными до *m*-го порядка включительно обладают конечной энергией на Ω . Очевидно, что $H^0 \supset H^1 \supset H^2 \supset ...$

Напомним формулы, определяющие операторы *div* и *grad* из уравнения (1.1) в декартовой и цилиндрической системах координат. В декартовой системе координат (x, y, z)

grad
$$v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$
 (3.1)

$$div\,\vec{Q} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_3}{\partial z},\tag{3.2}$$

в цилиндрической системе координат (*r*, φ, *z*)

$$grad v = \left(\frac{\partial v}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad (3.3)$$

$$div \,\vec{Q} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rQ_1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q_3}{\partial z} \,. \tag{3.4}$$

В соотношениях (3.1)-(3.4) v – некоторая функция из H^1 , $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ – вектор-функция с компонентами $Q_1, Q_2, Q_3 \in H^1$. Формулы (3.1)–(3.4) записаны для случая трехмерной области Ω (т.е. n=3). Для одно- и двухмерных областей Ω (n=1, 2) эти формулы останутся справедливыми, если в них опустить соответствующие компоненты и слагаемые.

В дальнейшем под записью $grad v \cdot grad w$ мы будем понимать скалярное произведение вектора grad v на вектор grad w, и это произведение имеет следующий вид в декартовой и цилиндрической системах координат соответственно:

grad
$$v \cdot \operatorname{grad} w = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z},$$
 (3.5)

grad
$$v \cdot \operatorname{grad} w = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z},$$
 (3.6)

где $v, w \in H^1$. Под записью $(grad v)^2$ будем понимать $grad v \cdot grad v$.

Определим, какому пространству должно принадлежать решение краевой задачи (1.1)–(1.4), если правая часть уравнения (1.1) $f \in H^0$. Если p – достаточно гладкая функция, то решение u должно принадлежать пространству H^2 , т.е. вторые производные и должны обладать конечной энергией. Однако если определить пространство решений u как все пространство H^2 , то единственность в соответствии решения u некоторой $f \in H^0$ может не выполняться. Действительно, если $\gamma=0$ и *и* удовлетворяет уравнению (1.1) при некоторой $f \in H^0$, то уравнению (1.1) удовлетворяет и функция $u_1 = u + c$, где c – некоторая константа, отличная от нуля, т.е. $u_1 \neq u$ и единственность нарушена. Для того чтобы поставить в соответствие f единственное u недостаточно, чтобы и удовлетворяло только уравнению (1.1). Необходимо также, чтобы и удовлетворяло и краевым условиям (1.2)–(1.4), заданным на границе S области Ω . Таким образом, решение должно принадлежать не всему пространству H^2 , а его сужению H_B^2 – пространству функций, имеющих вторые производные с конечной энергией и удовлетворяющих краевым условиям на границе S области Ω (на что указывает нижний индекс B у H_B^2). В этом случае краевая задача устанавливает взаимно однозначное отображение из H_B^2 в H^0 , т.е. для всякой функции $f \in H^0$ дифференциальное уравнение (1.1) имеет единственное решение $u \in H_B^2$. Таким образом, краевую задачу можно представить в виде

$$Lu=f, (3.7)$$

где оператор *L* есть взаимно однозначное отображение H_B^2 в H^0 , и вид оператора *L* можно получить из сравнения уравнений (1.1) и (3.7): $L=[-div(p \ grad)+\gamma E]$, где *E* – тождественный оператор. Очевидно, что в оператор *L* не входят краевые условия, так как в данном случае *L* действует на функции класса H_B^2 , уже удовлетворяющие всем краевым условиям задачи.

Итак, первый шаг в определении решения u краевой задачи сделан: мы подобрали пространство H_B^2 функций u и пространство H^0 правых частей f так, чтобы каждой функции f соответствовало единственное решение u. Приступим теперь ко второму шагу: построению алгоритма нахождения $u \in H_B^2$, соответствующего $f \in H^0$.

Предварительно докажем лемму, дающую правило интегрирования по частям в многомерном случае.

<u>Лемма 3.1.</u> Пусть u, v, p – некоторые функции, определенные в области Ω с границей S, и $u \in H^1$, $v \in H^1$, p – ограниченная на Ω функция. Тогда справедлива формула

$$\int_{\Omega} div(p \, grad \, u) v \, d\Omega = -\int_{\Omega} p \, grad \, u \cdot grad \, v \, d\Omega + \int_{S} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS \quad , \tag{3.8}$$

если интеграл $\int div(p grad u)v d\Omega$ существует.

Доказательство. Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса

$$\int_{\Omega} div \vec{Q} d\Omega = \int_{S} Q_n dS , \qquad (3.9)$$

где \vec{Q} – некоторый вектор; Q_n – проекция \vec{Q} на внешнюю нормаль к границе S области Ω .

Возьмем вектор $\vec{Q} = pv gradu$ и применим для него формулу Остроградского-Гаусса (3.9)

$$\int_{\Omega} div(pv grad u) d\Omega = \int_{S} pv(grad u)_n dS .$$
(3.10)

Но проекция grad u на внешнюю нормаль есть производная по внешней нормали, т.е.

$$(grad u)_n = \frac{\partial u}{\partial n}$$
 (3.11)

Поскольку для оператора *div* справедливо соотношение

$$div(v\vec{Q}) = v div\vec{Q} + \vec{Q} \cdot gradv, \qquad (3.12)$$

то, полагая в нем $\vec{Q} = p \ grad \ u$, получаем

$$div(pv \cdot grad u) = p \cdot grad u \cdot grad v + v \cdot div(p \cdot grad u) .$$
(3.13)

Подставляя (3.11) и (3.13) в (3.10), получаем

$$\int_{\Omega} div(p \, grad \, u) v \, d\Omega + \int_{\Omega} p \, grad \, u \cdot grad \, v \, d\Omega = \int_{S} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS,$$

откуда и следует формула интегрирования по частям (3.8).

Эквивалентная вариационная формулировка рассматриваемой краевой задачи дается в следующей теореме.

<u>Теорема 3.1.</u> Решение краевой задачи для уравнения (1.1) с краевыми условиями первого, второго и третьего рода (1.2)–(1.4), заданными соответственно на границах S_1 , S_2 и S_3 области Ω , эквивалентно минимизации функционала

$$I(v) = \int_{\Omega} \left(p(\operatorname{grad} v)^2 + \gamma v^2 \right) d\Omega + \int_{S_3} \beta v^2 dS - 2 \int_{\Omega} f v d\Omega - 2 \int_{S_2} \Theta v dS - 2 \int_{S_3} \beta u_\beta v dS \quad (3.14)$$

Задачу минимизации функционала *I*(*v*) называют также вариационной задачей.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, определим, на каком классе функций v необходимо минимизировать функционал I(v) /14/. Мы уже знаем, что решение краевой задачи u лежит в H_B^2 . Значит, класс функций v, на котором минимизируется I(v), должен содержать пространство H_B^2 .Заметим, однако, что выражение для I(v) не содержит вторых производных. Это значит, что I(v) можно определить на функциях v, у которых только первые производные (а не вторые) обладают конечной энергией. Следовательно, класс функций, на которых задача минимизации имеет смысл, шире, чем пространство H_B^2 .

Тогда расширим класс функций, на котором мы решаем задачу минимизации, на основании следующего принципа: функцию v можно включить в этот класс, если только v – предел последовательности функций $v_N \in H_B^2$. Под словом "предел" мы будем понимать предел в смысле квадратичных членов в выражении для I(v), т.е. $v = \lim_{N \to \infty} v_N$, если

$$\int_{\Omega} \left(p(grad(v-v_N))^2 + \gamma(v-v_N)^2 \right) d\Omega + \int_{S_3} \beta(v-v_N)^2 dS \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$
(3.15)

Очевидно, что такое расширение пространства H_B^2 не может уменьшить *inf* (нижнюю грань) функционала *I*, так как каждое новое значение I(v) (т.е. значение функционала *I* на добавленной к H_B^2 функции v) есть предел старых значений $I(v_N)$ (т.е. значений *I* на функциях $v_N \in H_B^2$). Это непосредственно следует из (3.15). Таким образом, если минимум *I* уже достигался на какой-то функции $u \in H_B^2$, то она останется минимизирующей функцией. Однако у нас теперь огромное преимущество: минимум разрешается искать также и на функциях v, у которых только первые производные обладают конечной энергией /14/.

Процесс расширения H_B^2 фактически является пополнением пространства H_B^2 , если считать, что (3.15) является квадратом некоторой нормы разности v и v_N . Но при определенных условиях (3.15) действительно является квадратом энергетической нормы разности v и v_N , и поэтому рассмотренный процесс расширения H_B^2 является пополнением неполного в метрике $\rho_1(v, v_N) = ||v - v_N||_1$ пространства $H_B^2/14/.$

Пространством функций, допустимых при минимизации функционала I(v), будет не все пространство H^1 , а лишь его подмножество H^1_E – множество всех функций v, имеющих первые производные с конечной энергией (на что указывает верхний индекс) и удовлетворяющих только первым краевым условиям на границе S_1 (на что указывает нижний индекс E) /14/. Пространство H^1_E и есть

пополнение пространства H_B^2 в обычной метрике пространства H^1 . В процессе доказательства теоремы 3.1 мы убедимся, что функция *и*, минимизирующая I(v) на H_E^1 , автоматически удовлетворяет вторым и третьим краевым условиям на границах S_2 и S_3 соответственно.

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобится еще один класс функций – пространство H_0^1 .

<u>Определение.</u> Пространством H_0^1 будем называть множество функций $v \in H^1$, которые на границе S_1 удовлетворяют нулевым (на что указывает нижний индекс ноль у H_0^1) первым краевым условиям (а не первым краевым условиям исходной задачи, которым должны удовлетворять функции $\omega \in H_E^1$).

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 3.1.

<u>Доказательство.</u> Пусть функционал I(v) принимает минимальное значение на функции $u \in H_E^1$. Покажем, что в этом случае *и* является решением рассматриваемой краевой задачи. Выберем произвольное число ε и произвольную функцию $v_0 \in H_0^1$. Очевидно, что функция $\omega = u + \varepsilon v_0 -$ элемент множества H_E^1 : $\omega \in H^1$, так как $u \in H_E^1 \subset H^1$ и $v_0 \in H_0^1 \subset H^1$, и ω удовлетворяет первым краевым условиям исходной краевой задачи (так как $\omega|_{S_1} = u|_{S_1} + \varepsilon v_0|_{S_1} = u|_{S_1}$, поскольку $v_0|_{S_1} = 0$ по определению класса H_0^1). А поскольку *и* минимизирует I(v) на H_E^1 , то

$$I(u) \leq I(\omega),$$

или

$$I(u) \le I(u + \varepsilon v_0). \tag{3.16}$$

Вычислим значение $I(u+\varepsilon v_0)$ из определения (3.14) функционала I(v)

$$\begin{split} I(u+\varepsilon v_{0}) &= \int_{\Omega} p \, grad(u+\varepsilon v_{0}) \cdot grad(u+\varepsilon v_{0}) d\Omega + \int_{\Omega} \gamma(u+\varepsilon v_{0})^{2} d\Omega + \\ &+ \int_{S_{3}} \beta(u+\varepsilon v_{0})^{2} \, dS - 2 \int_{\Omega} f(u+\varepsilon v_{0}) d\Omega - 2 \int_{S_{2}} \Theta(u+\varepsilon v_{0}) dS - 2 \int_{S_{3}} \beta u_{\beta}(u+\varepsilon v_{0}) dS = \\ &= \left[\int_{\Omega} p \, grad \, u \cdot grad \, u \, d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u^{2} d\Omega + \int_{S_{3}} \beta u^{2} dS - 2 \int_{\Omega} fu \, d\Omega - 2 \int_{S_{2}} \Theta u \, dS - 2 \int_{S_{3}} \beta u_{\beta} u \, dS \right] + \\ &+ 2\varepsilon \left[\int_{\Omega} p \, grad \, u \cdot grad \, v_{0} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u v_{0} d\Omega + \int_{S_{3}} \beta u v_{0} dS - \int_{\Omega} fv_{0} d\Omega - \int_{S_{2}} \Theta v_{0} dS - \int_{S_{3}} \beta u_{\beta} v_{0} dS \right] + \end{split}$$

$$+\varepsilon^{2}\left[\int_{\Omega} p \operatorname{grad} v_{0} \cdot \operatorname{grad} v_{0} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma v_{0}^{2} d\Omega + \int_{S_{3}} \beta v_{0}^{2} dS\right].$$

Выражение в первой квадратной скобке дает I(u). Значение выражения в квадратной скобке, которая умножается на ε^2 , не может быть отрицательным: под интегралами стоят произведения неотрицательных функций p, γ и β на квадраты функции v_0 и ее производных. Поэтому обозначим эту скобку b^2 . Скобку, на которую умножается 2 ε , обозначим C, т.е.

$$\begin{split} b^{2} &= \int_{\Omega} p \, grad \, v_{0} \cdot grad \, v_{0} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma v_{0}^{2} d\Omega + \int_{S_{3}} \beta v_{0}^{2} dS , \\ C &= \int_{\Omega} p \, grad \, u grad \, v_{0} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u v_{0} d\Omega + \int_{S_{3}} \beta u v_{0} dS - \int_{\Omega} f v_{0} d\Omega - \int_{S_{2}} \theta v_{0} dS - \int_{S_{3}} \beta u_{\beta} v_{0} dS . (3.17) \end{split}$$

Тогда

$$I(u+\varepsilon v_0)=I(u)+2\varepsilon C+\varepsilon^2 b^2.$$
(3.18)

Подставляя это значение в (3.16), получаем

$$I(u) \leq I(u) + 2\varepsilon C + \varepsilon^2 b^2$$

или

$$2\varepsilon C + \varepsilon^2 b^2 \ge 0. \tag{3.19}$$

Покажем, что *C*=0. Предположим противное: *C*≠0. В силу произвольности выбора є мы можем взять $\varepsilon = -\frac{C}{b^2}$, тогда

$$2\varepsilon C + \varepsilon^2 b^2 = -\frac{2C^2}{b^2} + \frac{C^2}{b^4} b^2 = -\frac{C^2}{b^2} < 0$$
(3.20)

при $C \neq 0$. Но (3.19) противоречит (3.20), т.е. C=0. Мы доказали, что C=0, если $b\neq 0$. При b=0 равенство нулю C следует сразу из (3.19), если в нем взять $\varepsilon = -C$ (хотя, вообще говоря, $b^2 \neq 0$ для любой функции $v_0 \neq 0$, если $v_0 \in H_0^1$).

Таким образом, *C*=0, т.е. (см. (3.17))

$$\int_{\Omega} p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v_0 d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u v_0 d\Omega + \int_{S_3} \beta u v_0 dS - \int_{\Omega} f v_0 d\Omega - \int_{S_2} \theta v_0 dS - \int_{S_3} \beta u_\beta v_0 dS = 0.$$
(3.21)

Воспользуемся формулой (3.8) интегрирования по частям и объединим интегралы по поверхности S_3
$$-\int_{\Omega} div(p g rad u)v_0 d\Omega + \int_{S} p \frac{\partial u}{\partial n} v_0 dS + \int_{\Omega} \gamma u v_0 d\Omega + \int_{S_3} \beta (u - u_\beta) dS - \int_{S_2} \theta v_0 dS - \int_{\Omega} f v_0 d\Omega = 0.$$

Учитывая, что $S=S_1 \cup S_2 \cup S_3$ и

$$\int_{S} p \frac{\partial u}{\partial n} v_0 \, dS = \int_{S_1} p \frac{\partial u}{\partial n} v_0 \, dS + \int_{S_2} p \frac{\partial u}{\partial n} v_0 \, dS + \int_{S_3} p \frac{\partial u}{\partial n} v_0 \, dS \,,$$

получаем

$$\int_{\Omega} (-div(p \cdot grad u) + \gamma u - f)v_0 d\Omega + \int_{S_1} p \frac{\partial u}{\partial n} v_0 dS + \int_{S_2} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} - \theta \right) v_0 dS + \int_{S_3} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \left(u - u_\beta \right) \right) dS = 0.$$

Поскольку $v_0 \in H_0^1$ (т.е. v_0 принимает на S_1 нулевое значение: $v_0|_{S_1} = 0$), то $\int_{S_1} p \frac{\partial u}{\partial n} v_0 \, dS = 0$, и тогда $\int_{\Omega} (-div(p \, grad \, u) + \gamma u - f) v_0 d\Omega + \int_{S_2} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} - \theta \right) v_0 dS +$

$$+ \int_{S_3} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \left(u - u_\beta \right) \right) dS = 0.$$
(3.22)

Последнее равенство справедливо для любых $v_0 \in H_0^1$. Но класс H_0^1 содержит в себе пространство D_{Ω} бесконечно дифференцируемых финитных в области Ω функций ψ , причем $\psi|_S = 0$. Тогда из (3.22) следует

$$\int_{\Omega} (-div(p grad u) + \gamma u - f) \psi d\Omega = 0$$
для любых $\psi \in D_{\Omega}.$

Но равенство $\int_{\Omega} F \psi \, d\Omega = 0$ для любых $\psi \in D_{\Omega}$ справедливо только тогда, когда *F*=0 почти всюду на Ω :

$$-div(pgradu) + \gamma u - f = 0$$
 почти всюду на Ω , (3.23)

т.е. для функции *и* выполняется уравнение (1.1) исходной краевой задачи. Учитывая (3.23), из (3.22) получаем

$$\int_{S_2} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} - \theta \right) v_0 \, dS + \int_{S_3} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \left(u - u_\beta \right) \right) dS = 0.$$
(3.24)

Выбирая из класса H_0^1 множество G_{S_2} функций ξ , таких что $\xi|_{S_3} = 0$, получим из (3.24)

$$\int_{S_2} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} - \theta \right) \xi \, dS = 0 \, \text{для любых } \xi \in G_{S_2} \,. \tag{3.25}$$

Пусть S_2 – односвязная гладкая граница. Рассмотрим пространство D_{S_2} бесконечно дифференцируемых финитных на S_2 функций η . Для каждой функции η , заданной на S_2 , найдется функция $\xi \in G_{S_2} \subset H_0^1$ (заданная на Ω) такая, что $\xi|_{S_2} = \eta$ (чтобы получить такую ξ , достаточно определенным образом продолжить η на всю область Ω), поэтому

$$\int_{S_2} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} - \theta \right) \eta \, dS = \int_{S_2} \left(p \frac{\partial u}{\partial n} - \theta \right) \xi \, dS = 0 \, \text{для любой } \eta \in D_{S_2} \,.$$

Но равенство $\int_{S_2} Q\eta \, dS = 0$ для любых $\eta \in D_{S_2}$ справедливо только тогда, когда Q=0 почти всюду на S_2 :

$$p\frac{\partial u}{\partial n} - \theta = 0$$
 почти всюду на S_2 , (3.26)

т.е. функция *и* удовлетворяет второму краевому условию на границе S₂.

Абсолютно аналогично доказывается, что функция *и* удовлетворяет и третьему краевому условию на границе S₃:

$$p\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u - u_{\beta}) = 0$$
 почти всюду на S_3 . (3.27)

При доказательстве (3.26) мы потребовали, чтобы S_2 была односвязной гладкой границей. Если S_2 – кусочно-связная или кусочно-гладкая (т.е. $S_2 = \bigcup_i S_2^i$, где S_2^i – односвязные гладкие границы), то приведенные рассужде-

ния справедливы для каждой из S_2^i , т.е. равенство $p \frac{\partial u}{\partial n} - \theta = 0$ справедливо на каждой S_2^i , а значит, и на всей границе S_2 (аналогично и для S_3).

Таким образом, нами доказано, что если минимум функционала *I* достигается на функции *u*, то *u* является решением исходной краевой задачи: удовлетворяет уравнению (1.1) и вторым и третьим краевым условиям (первым краевым условиям u удовлетворяет в силу выбора допустимого для минимизации пространства H_F^1).

Обратное утверждение доказывается снизу вверх. Действительно, если u – решение исходной краевой задачи, то справедливо равенство (3.22), из которого следует, что входящее в (3.18) и определяемое соотношением (3.16) выражение C равно нулю. Тогда из (3.18) получаем для любого ε и произвольной $v_0 \in H_0^1$

 $I(u+\varepsilon v_0)=I(u)+\varepsilon^2 b^2$

или

$$I(u+\varepsilon v_0)\geq I(u),$$

а поскольку любой элемент $v \in H_E^1$ может быть представлен в виде $v=u+\varepsilon v_0$ (для этого достаточно взять $v_0=(v-u)/\varepsilon$), то $I(v)\ge I(u)$ для любого $v \in H_E^1$, т.е. решение u краевой задачи (1.1)–(1.4) доставляет минимум функционалу I(v), определяемому соотношением (3.14). <u>Теорема доказана.</u>

Функционал I(v) можно записать в виде

$$I(v) = (Lv, v) - 2f(v), \tag{3.28}$$

где (Lv, w) и f(v) – билинейная и линейная формы, заданные на функциях v, $\omega \in H^1$. Вид этих форм можно определить из сравнения записей (3.14) и (3.28) одного и того же функционала I(v):

$$(Lv,w) = \int_{\Omega} p \, grad \, v \cdot grad \, w \, d\Omega + \int_{\Omega} \gamma v \, w \, d\Omega + \int_{S_3} \beta v \, w \, dS , \qquad (3.29)$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{S_2} \theta v \, dS + \int_{S_3} \beta u_\beta v \, dS \quad . \tag{3.30}$$

Очевидно, что форма f(v) является линейным ограниченным функционалом, заданным на элементах $v \in H^1$, а форма (Lv, w) удовлетворяет следующим соотношениям для любых v, $w \in H^1$ и любых вещественных λ и μ :

$$(Lv, w) = (Lw, v),$$
 (3.31)

$$(Lv, \lambda w + \mu y) = \lambda(Lv, w) + \mu(Lv, y), \qquad (3.32)$$

$$(Lv, v) \ge 0. \tag{3.33}$$

Установить справедливость свойств (3.31)–(3.33) очень легко непосредственной проверкой их для (3.29). Свойства (3.31)–(3.33) являются свойствами скалярного произведения (т.е. свойствами симметричности, линейности и неотрицательности), и для того чтобы (*Lv*, *w*) стало скалярным произведением, к свойствами

(3.31)-(3.33) достаточно добавить лишь одно: (Lv, v)=0 тогда и только тогда, когда v=0. При определенных условиях (обеспечивающих единственность решения исходной эллиптической краевой задачи (1.1)-(1.4)) и это свойство выполняется и форма (Lv, w) становится скалярным произведением, которое называют энергетическим скалярным произведением и обозначают a(v, w).

При записи функционала I(v) в виде (3.28) теорема 3.1 может быть переформулирована следующим образом: минимизация функционала (3.28) на множестве функций H_E^1 эквивалентна решению уравнения

$$(Lu, v_0) = f(v_0)$$
 для любых $v_0 \in H_0^1$. (3.34)

Действительно, если функция u минимизирует I(v) на H_E^1 , то для произвольных $v_0 \in H_0^1$ и числа є

$$I(u) \le I(u + \varepsilon v_0) = (L(u + \varepsilon v_0), u + \varepsilon u_0) - 2f(u + \varepsilon v_0).$$
(3.35)

Используя свойства (3.31)–(3.32) симметричности и линейности формы (Lv, w) и свойство линейности функционала f(v), получаем

$$(L(u+\varepsilon v_0), u+\varepsilon v_0) = (L(u+\varepsilon v_0), u) + \varepsilon (L(u+\varepsilon v_0), v_0) =$$

=(Lu, u+\varepsilon v_0) + \varepsilon (Lv_0, u+\varepsilon v_0) = (Lu, u) + \varepsilon (Lv_0, u) + \varepsilon^2 (Lv_0, v_0) = (Lu, u) + 2\varepsilon (Lu, v_0) + \varepsilon^2 (Lv_0, v_0);

 $f(u + \varepsilon v_0) = f(u) + \varepsilon f(v_0).$

Подставим эти значения в (3.35)

$$I(u) \leq [(Lu, u) - 2f(u)] + 2\varepsilon[(Lu, v_0) - f(v_0)] + \varepsilon^2(Lv_0, v_0) =$$

= I(u) + 2\varepsilon[(Lu, v_0) - f(v_0)] + \varepsilon^2(Lv_0, v_0),

откуда

$$2\varepsilon[(Lu, v_0) - f(v_0)] + \varepsilon^2(Lv_0, v_0) \ge 0.$$
(3.36)

По свойству (3.33) неотрицательности (Lv, v) можно положить $b^2 = (Lv_0, v_0) \ge 0$, и в этом случае нетрудно показать, что сомножитель при 2 ε в (3.36) должен быть нулевой (это доказательство аналогично доказательству того, что C=0, если справедливо (3.19) в доказательстве теоремы 3.1), т.е.

$$(Lu, v_0)-f(v_0)=0$$
 для любых $v_0 \in H_0^1$,

откуда следует (3.34). Обратное утверждение, как и в теореме 3.1, доказывается снизу вверх.

Такое абстрактное доказательство основной части теоремы 3.1 короче и потому более наглядно, чем доказательство для функционала I(v) вида (3.14). Однако запись функционала I(v) в виде (3.28) не позволяет определить его конкретный вид для краевой задачи со вторыми и третьими краевыми условиями и показать, что эти краевые условия будут выполняться <u>автоматически</u> при минимизации функционала I(v) (как это было показано для функционала I(v) вида (3.14)). Этим определяется полезность первого доказательства с полными выкладками.

Следует отметить, что оператор *L* в (3.28) и (3.34) не тождественен оператору дифференциального уравнения (1.1). Он содержит в себе информацию и о краевых условиях третьего рода: ведь мы уже не требуем выполнения всех краевых условий на допустимом для минимизации I(v) множестве функций H_E^1 ; в оператор не входили краевые условия, когда он действовал на множестве H_B^2 функций, удовлетворяющих всем краевым условиям исходной задачи.

Аналогично и правая часть f(v) в (3.28) и (3.34) не определяется только функцией f из правой части уравнения (1.1), а содержит в себе информацию и о краевых условиях второго и третьего рода.

Уравнение (3.34) называется уравнением <u>в слабой форме</u> или <u>уравнением</u> <u>Галеркина</u>. Один из основных результатов теоремы 3.1 заключается в том, что если для оператора L выполняется свойство (3.31) (являющееся фактически свойством самосопряженности L), то минимизация функционала (3.28) (для нашей задачи функционал принимает вид (3.14)) эквивалентна решению уравнения Галеркина (3.34) (для нашей задачи решению уравнения (3.21)).

<u>Определение</u>. Будем называть краевые условия первого рода <u>главными</u>, а краевые условия второго и третьего рода – <u>естественными</u>.

Такие названия краевых условий определяются ролью, которую они играют в выборе пространства решений H_E^1 : все функции пространства решений должны удовлетворять первым краевым условиям (поэтому они и называются главными), но не должны удовлетворять вторым и третьим краевым условиям: их выполнение обеспечится автоматически (естественным образом) в процессе минимизации функционала I(v). Требовать выполнения вторых и третьих краевых условий для всех функций v, на которых минимизируется функционал I(v), в таком случае даже нецелесообразно, так как последовательность функций, удовлетворяющих вторым и третьим краевым условиям, может сходиться в норме пространства H^1 к функции, не удовлетворяющей этим краевым условиям (примеры таких последовательностей приведены в /14, с.16-18; 8, с.35-36/). Поэтому мы можем получить для минимизации функционала *I*(*v*) множество функций *v*, не содержащее свои предельные точки, т.е. незамкнутое множество (или неполное пространство) функций. В этом случае появляется следующая проблема: если функция и предельная, то она может не лежать в определенном таким образом классе функций, а значит, может и не удовлетворять естественным краевым условиям. Если же минимизировать I(v) на пространстве функций H_E^1 (т.е. не учитывать при определении допустимого для минимизации пространства вторые и третьи краевые условия), то функция *u*, доставляющая минимум I(v), удовлетворяет краевым условиям второго и третьего рода (что было доказано в теореме 3.1), и в силу замкнутости H_E^1 и при ограниченности I(v) снизу эта функция *u* существует и лежит в H_E^1 , что обеспечит выполнение и краевых условий первого рода.

Сделаем одно замечание насчет вида пространств H_E^1 и H_0^1 , когда *mes* $S_1=0$, т.е. когда первого краевого условия в исходной краевой задаче нет. В этом случае допустимым для минимизации функционала I(v) множеством функций становится все пространство H^1 , поэтому мы формально будем считать, что при $mes S_1 = 0$ $H_E^1 = H^1$. Аналогично и с пространством H_0^1 : при отсутствии первого краевого условия (mes $S_1=0$) будем понимать под H_0^1 все пространство H^1 , т.е. $H_0^1 = H^1$. Очевидно, что все результаты, полученные ранее для классов H_E^1 , H_0^1 , остаются справедливыми, если учесть это замечание. Например, в уравнении Галеркина (3.34) или (3.21) при *mes* $S_1=0$, функции v_0 должны принадлежать всему пространству H^1 , но тогда мы считаем $H_0^1=H^1$, и результат теоремы 3.1 остается тем же и для случая *mes* $S_1=0$. Аналогично минимизация функционала I(v) при *mes* $S_1=0$ должна проводиться на всем пространстве H^1 , но в этом случае $H_E^1=H^1$ и результат не меняется. Далее мы не будем специально оговаривать, что при *mes* $S_1=0$ $H_E^1=H^1$ и $H_0^1=H^1$.

Итак, для получения решения u краевой задачи (1.1)–(1.4) мы должны минимизировать функционал I(v) на бесконечномерном пространстве H_E^1 . При построении численного решения по методу Ритца пространство H_E^1 в вариационной задаче заменяется своим <u>конечномерным подпространством</u> V_E^h /14/.

Элементы v^h из V_E^h называются <u>пробными функциями</u>. Так как они принадлежат H_E^1 , то удовлетворяют главному краевому условию $v^h\Big|_{S_1} = u_g$. Минимизация функционала $I(v^h)$ на подпространстве V^h приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), число уравнений которой совпадает с размерностью подпространства V_E^h . Аппроксимация Ритца – это функция u^h , минимизирующая I(v) на подпространстве $V_E^h \subset H_E^1$

$$I(u^h) \leq I(v^h)$$
 для всех $v^h \in V_E^h$.

<u>Определение</u>. Будем называть точным решением функцию u, доставляющую минимум функционалу I(v) на всем допустимом пространстве H_E^1 , а приближенным решением – функцию u^h , доставляющую минимум функционалу I(v) на некотором подпространстве V_E^h допустимого пространства H_E^1 .

В классическом методе Ритца базисные функции подпространства V^h_E выбирались в виде полиномов, тригонометрических или других функций, ненулевых почти на всей расчетной области Ω . Такой выбор подпространства V_E^h приводил либо к большой заполненности и плохой обусловленности матрицы СЛАУ, получаемой в результате минимизации $I(v^h)$ на V_E^h (как, например, в случае полиномиального базиса /10/), либо к непреодолимым трудностям в вычислениях при решении задач в областях Ω со сложной геометрией в случае тригонометрического базиса. Главным отличием МКЭ от классического метода Ритца является выбор в качестве базисных функций подпространства V_E^h финитных (или локальных) функций /8, 14/, т.е. функций, каждая из которых отлична от нуля лишь на нескольких малых подобластях Ω_i , на которые разбивается область Ω . На каждой подобласти Ω_i базисная функция выбирается, как правило, в виде полинома. Поэтому пространство V_E^h пробных функций v^h является пространством кусочно-полиномиальных функций, так как любая пробная функция $v^h \in V^h_E$ может быть представлена в виде линейной комбинации базисных. Такой выбор подпространства V_E^h позволяет получить все преимущества вариационных и конечно-разностных методов: получать приближенные решения, ближайшие к точному в энергетической норме, и при этом работать со СЛАУ, имеющими хорошо обусловленные и слабо заполненные ненулевыми элементами матрицы.

<u>Определение</u>. Пусть V_E^h – подпространство допустимого пространства H_E^1 и u^h – приближенное решение (т.е. u^h минимизирует функционал I(v) на V_E^h). Тогда, если в V_E^h существует базис из финитных функций, приближенное решение u^h будем называть МКЭ-решением (т.е. решением, полученным по методу конечных элементов).

В дальнейшем при построении МКЭ-решения мы будем использовать тот факт, что минимизация функционала (3.28) эквивалентна решению уравнения Галеркина (3.34), которое фактически является операторной формой записи уравнения Галеркина (3.21). При переходе к конечномерному подпространству V_E^h гильбертова пространства H_E^1 уравнение Галеркина (3.34) примет вид

$$(Lu^h, \psi_i) = f(\psi_i), \qquad j=1, ..., n_0,$$

где Ψ_j – базисные функции конечномерного подпространства V_0^h (размерности n_0) гильбертова пространства H_0^1 .

Помимо конечномерных подпространств V_E^h и V_0^h , аппроксимирующих соответственно пространства H_E^1 и H_0^1 , в наших рассуждениях будет использовано и конечномерное пространство V^h , аппроксимирующее гильбертово пространство H^1 ($V^h \subset H^1$) и имеющее базис из финитных кусочно-полиномиальных функций Ψ_i , i = 1, ..., n. При этом мы будем считать, что конечномерные

пространства V_E^h и V_0^h строятся на основе пространства V^h следующим образом. Элементами пространств V_E^h и V_0^h являются линейные комбинации базисных функций Ψ_i пространства V^h , в которых зафиксированы значения коэффициентов перед базисными функциями, не равными нулю на границе S₁ (с заданным на ней краевым условием перового рода) так, что для любой функции $v_E^h \in V_E^h$ выполняется условие (см. (1.2)) $v_E^h \Big|_{S_1} = u_g$, а для любой функции $v_0^h \in V_0^h$ выполняется условие $v_0^h \Big|_{S_1} = 0$. То есть если mes $S_1 = 0$, то V_E^h и V_0^h совпадают с V^h (как в этом случае совпадают с H^1 пространства H^1_E и H^1_0). Если же $mes S_1 \neq 0$, то V_E^h и V_0^h являются подпространствами пространства V^h , причем размерность V_E^h и V_0^h меньше размерности V^h на число базисных функций, веса которых в разложениях произвольных элементов $v_E^h \in V_E^h$ и $v_0^h \in V_0^h$ по базисным функциям ψ_i пространства V^h были зафиксированы для обеспечения выполнения условий $v_E^h \Big|_{S_1} = u_g$ и $v_0^h \Big|_{S_1} = 0$. В дальнейшем через n_0 будем обозначать размерность пространств V_E^h и V_0^h , а через N_0 – множество индексов *i* таких, что базисные функции Ψ_i пространства V^h являются и базисными функциями пространств V_E^h и V_0^h (т.е. при *mes* $S_1 = 0$ $n_0 = n$ и $N_0 = \{1, ..., n\}$).

Получим аппроксимацию уравнения Галеркина (3.21) на конечномерных подпространствах V_E^h и V_0^h исходных пространств H_E^1 и H_0^1 . Для этого заменим в (3.21) функцию $u \in H_E^1$ аппроксимирующей ее функцией $u^h \in V_E^h$, а функцию $v_0 \in H_0^1 - функцией v_0^h \in V_0^h$

$$\int_{\Omega} p \operatorname{grad} u^{h} \operatorname{grad} v_{0}^{h} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u^{h} v_{0}^{h} d\Omega + \int_{S_{3}} \beta u^{h} v_{0}^{h} dS =$$

$$= \int_{\Omega} f v_{0}^{h} d\Omega + \int_{S_{2}} \theta v_{0}^{h} dS + \int_{S_{3}} \beta u_{\beta} v_{0}^{h} dS \quad \text{для любой } v_{0}^{h} \in V_{0}^{h} .$$

$$(3.37)$$

Мы будем считать, что в качестве базисных функций Ψ_i взяты кусочнополиномиальные функции, равные единице в одном узле конечноэлементной сетки и нулю во всех остальных. Поскольку любая функция $v_0^h \in V_0^h$ может быть представлена в виде линейной комбинации

$$\upsilon_0^h = \sum_{i \in N_0} q_i \Psi_i \quad , \tag{3.38}$$

вариационное уравнение (3.37) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\int_{\Omega} p \operatorname{grad} u^{h} \operatorname{grad} \psi_{i} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u^{h} \psi_{i} d\Omega + \int_{S_{3}} \beta u^{h} \psi_{i} dS =$$

$$= \int_{\Omega} f \psi_{i} d\Omega + \int_{S_{2}} \theta \psi_{i} dS + \int_{S_{3}} \beta u_{\beta} \psi_{i} dS, \quad i \in N_{0}.$$
(3.39)

Убедиться в эквивалентности (3.39) и (3.37) очень просто. Действительно, с одной стороны, каждое из уравнений (3.39) фактически является уравнением (3.37) для $v_0^h = \psi_i \in V_0^h$; с другой же стороны, для того чтобы показать, что справедливость уравнения (3.37) для любой функции $v_0^h \in V_0^h$ следует из справедливости системы (3.39), достаточно просуммировать уравнения системы (3.39) с весами q_i , определяющими эту функцию $v_0^h \in V_0^h$ в линейной комбинации (3.38).

Таким образом, МКЭ-решение u^h удовлетворяет системе уравнений (3.39). Поскольку $u^h \in V_E^h$, то оно может быть представлено в виде линейной комбинации базисных функций пространства V^h :

$$u^h = \sum_{j=1}^n q_j \Psi_j \tag{3.40}$$

причем $n-n_0$ компонент вектора весов $Q=(q_1, ..., q_n)^T$ должны быть фиксированы и могут быть определены из условия

$$v^h\Big|_{S_1} = u_g. \tag{3.41}$$

Подставляя (3.40) в (3.39), получаем СЛАУ для компонент q_i вектора весов Q с индексами $i{\in}\,N_0$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\Omega} p \operatorname{grad} \psi_{i} \operatorname{grad} \psi_{j} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi_{i} \psi_{j} d\Omega + \int_{S_{3}} \beta \psi_{i} \psi_{j} dS \right) q_{j} =$$

$$= \int_{\Omega} f \psi_{i} d\Omega + \int_{S_{2}} \theta \psi_{i} dS + \int_{S_{3}} \beta u_{\beta} \psi_{i} dS, \quad i \in N_{0} .$$

$$(3.42)$$

Обратим внимание на то, что система (3.42) содержит n_0 уравнений (n_0 – размерность пространств V_E^h и V_0^h), в то время как вектор Q имеет n компонент. Недостающие $n-n_0$ уравнения (при mes $S_1 \neq 0$) для компонент q_j вектора Q могут быть получены из условия (3.41):

ı.

$$\left. \sum_{j} q_{j} \Psi_{j} \right|_{S_{1}} = u_{g} \quad . \tag{3.43}$$

Соотношение (3.43) чаще всего объединяет в себе $n-n_0$ уравнений типа $q_j = u_g$, где j – номера узлов сетки, лежащих на границе S_1 (исключение составляет, например, тот случай, когда в качестве базисных функций используются кусочные полиномы, равные нулю во всех узлах сетки, причем веса этих полиномов определяются значениями производных функций u в узлах конечноэлементной сетки).

И в заключение данного пункта коротко остановимся на проблеме точности конечноэлементного решения u^h .

Как уже было сказано выше, квадратичная часть функционала (3.28) является скалярным произведением и для рассматриваемой нами задачи имеет вид (см. (3.29))

$$a(v,v) = (Lv,v) = \int_{\Omega} p(gradv)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \gamma v^2 d\Omega + \int_{S_3} \beta v^2 dS.$$
(3.44)

Это скалярное произведение a(v,v) называют энергетическим, и, соответственно, порождаемую им норму

$$\|v\|_{2}^{2} = a(v,v) \tag{3.45}$$

также называют энергетической.

Для энергетической нормы разности между конечноэлементным решением *u^h* и точным решением *u* справедливо неравенство

$$\|u - u^h\|_{\mathfrak{I}}^2 \le \|u - v_E^h\|_{\mathfrak{I}}^2$$
 для любой $v_E^h \in V_E^h$, (3.46)

где V_E^h – конечномерное пространство, на котором искалось МКЭ-решение u^h . Покажем это. Во-первых, для любой функции $v_E^h \in V_E^h$ разность $u - v_E^h = v_0^h$ является элементом подпространства V_0^h гильбертова пространства H_0^1 (так как $v_0^h \Big|_{S_1} = (u^h - v_E^h)\Big|_{S_1} = u^h \Big|_{S_1} - v_E^h\Big|_{S_1} = u_g - u_g = 0$). Во-вторых, для любой функции $v_0^h \in V_0^h \subset H_0^1$ справедливо уравнение Галеркина (3.34), в котором u – точное решение исходной задачи, и уравнение Галеркина (3.37), в котором u^h – МКЭ-решение, причем в операторном виде уравнение (3.37) может быть записано как $(Lu^h, v_0^h) = f(v_0^h)$ для любой $v_0^h \in V_0^h$. Поэтому для любой функции $v_E^h \in V_E^h$

$$\begin{aligned} \left\| u - v_E^h \right\|_{\mathfrak{I}}^2 &= a \left(u - v_E^h, \ u - v_E^h \right) = a \left(u - u^h + u^h - v_E^h, \ u - u^h + u^h - v_E^h \right) = \\ &= a \left(u - u^h, u - u^h \right) + 2a \left(u - u^h, u^h - v_E^h \right) + a \left(u^h - v_E^h, u^h - v_E^h \right) = \\ &= \left\| u - u^h \right\|_{\mathfrak{I}}^2 + 2a \left(u - u^h, v_0^h \right) + \left\| u^h - v_E^h \right\|_{\mathfrak{I}}^2 = \end{aligned}$$

$$= \left\| u - u^{h} \right\|_{\mathfrak{H}}^{2} + 2a(u, v_{0}^{h}) - 2a(u^{h}, v_{0}^{h}) + \left\| u^{h} - v_{E}^{h} \right\|_{\mathfrak{H}}^{2} =$$

$$= \left\| u - u^{h} \right\|_{\mathfrak{H}}^{2} + 2f(v_{0}^{h}) - 2f(v_{0}^{h}) + \left\| u^{h} - v_{E}^{h} \right\|_{\mathfrak{H}}^{2} = \left\| u - u^{h} \right\|_{\mathfrak{H}}^{2} + \left\| u^{h} - v_{E}^{h} \right\|_{\mathfrak{H}}^{2},$$

т.е.

$$\left\| u - u^h \right\|_{\mathfrak{I}}^2 = \left\| u - v_E^h \right\|_{\mathfrak{I}}^2 - \left\| u^h - v_E^h \right\|_{\mathfrak{I}}^2 \qquad$$
для любой $v_E^h \in V_E^h$, (3.47)

откуда сразу и следует неравенство (3.46). Соотношения (3.46) и (3.47) показывают, что в энергетической норме МКЭ-решение является <u>самым точным приближением</u> исходной функции u на конечномерном пространстве V_E^h , т.е. МКЭ дает <u>оптимальное</u> по точности решение в энергетической норме.

Кроме соотношений (3.46) и (3.47) для погрешности МКЭ-решения эллиптической краевой задачи (1.1)-(1.4) справедливы следующие оценки /14/:

$$\begin{aligned} \left\| u - u^{h} \right\|_{\mathfrak{I}} &= O(h^{m}), \\ \left\| u - u^{h} \right\|_{\mathfrak{I}} &= O(h^{m+1}), \\ \left\| u - u^{h} \right\|_{\mathfrak{I}} &= O(h^{m}), \end{aligned}$$

где h – максимальный размер конечного элемента в конечноэлементной сетке, m – порядок полиномов, используемых при построении кусочнополиномиальных базисных функций, а $\|v\|_0$ и $\|v\|_1$ – нормы соболевских пространств, определяемые соотношениями

$$\|v\|_{0}^{2} = \int_{\Omega} v^{2} d\Omega,$$

$$\|v\|_{1}^{2} = \int_{\Omega} ((grad v)^{2} + v^{2}) d\Omega.$$
(3.48)
(3.49)

3.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ И СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВКАХ

При построении численного решения на основе минимизации функционала (3.14) или решения эквивалентного ему уравнения Галеркина (3.21) прежде всего необходимо выполнить разбиение области Ω на подобласти (конечные элементы) Ω_k и определить конечномерное подпространство $V_E^h \subset H_E^1$ пробных функций v^h , на котором должна проводиться минимизация $I(v^h)$ или решаться уравнение Галеркина. Подпространство V_E^h в МКЭ определяется как линейное пространство, натянутое на финитные кусочно-полиномиальные функции Ψ_i , т.е. все его элементы являются линейными комбинациями базисных функций: $v^h = \sum_i q_i \Psi_i$. Поэтому для определения подпространства V_E^h необходимо по-

строить базисные функции Ψ_i . Для этого на каждом конечном элементе строятся локальные базисные функции $\hat{\psi}_{v}$. Их вид определяется видом полинома, ко- $\hat{\Psi}_{v}$ на каждом торый должен быть точно представлен с помощью функций конечном элементе, и степенью непрерывности пробных функций v^h на границах конечных элементов Ω_k . Затем из локальных базисных функций $\hat{\psi}_v$, заданных на своих элементах Ω_k , путем склеивания и доопределения нулем получают финитные базисные функции Ψ_i подпространства пробных функций, определенные на всей расчетной области Ω . Требуемая гладкость функций Ψ_i (а значит, и функций v^h) обеспечивается специальным подбором локальных базисных функций $\hat{\psi}_{\nu}$ (определением поведения их самих и, если это необходимо для увеличения гладкости Ψ_i , их производных на границах конечных элементов) и способом склеивания /7-11, 13, 14/. Фактически от того, как из локальных базисных функций $\hat{\psi}_{v}$ склеиваются глобальные базисные функции ψ_{i} , зависит очень важное свойство согласованности конечных элементов, а также понимание соответствия локальной нумерации узлов (и соответственно базисных функций) глобальной.

<u>Определение</u>. Конечные элементы Ω_k с определенными на них пробными функциями v^h из пространства V^h являются <u>согласованными</u>, если все входящие в функционал (3.14) (или уравнение Галеркина (3.21)) объемные и поверхностные интегралы могут быть представлены в виде суммы интегралов по конечным элементам Ω_k (для объемных интегралов) и в виде суммы интегралов по границам конечных элементов Ω_k (для поверхностных интегралов), т.е. для всех объемных интегралов, входящих в функционал I(v) (или уравнение Галеркина), должны выполняться равенства $\int_{\Omega} d\Omega = \sum_k \int_{\Omega_k} d\Omega$ (под точной понима-

ется соответствующее подынтегральное выражение); аналогичные равенства должные выполняться для поверхностных интегралов.

Свойство согласованности конечных элементов выполняется, если все пробные функции v^h , являющиеся линейными комбинациями базисных функций ψ_i , допустимы для минимизации функционала (3.14) (или решения вариационного уравнения Галеркина (3.21)), т.е. принадлежат соответствующему классу функций (для рассматриваемых нами дифференциальных уравнений второго порядка этим классом является пространство H_F^1).

Рассмотрим проблему представления параметров *p*, *γ*, *f*, β, *u*_β и θ исходной краевой задачи (1.1)-(1.4) в функционале (3.14) или уравнении Галеркина (3.21).

Все перечисленные параметры могут быть некоторыми функциями координат, и поэтому необходимо определить способ представления этих параметров на конечных элементах Ω_k .

На практике чаще всего применяют следующие два способа представления $p, \gamma, f, \beta, u_{\beta}$ и θ , позволяющие получить достаточно унифицированные формулы расчета вкладов в локальные матрицы и векторы конечных элементов.

Первый способ заключается в том, что функции p, γ , f, β , u_{β} и θ заменяются параметрами \overline{p} , $\overline{\gamma}$, \overline{f} , $\overline{\beta}$, $\overline{u_{\beta}}$ и $\overline{\theta}$, которые постоянны на каждом конечном элементе Ω_k или его границе. В этом случае производится минимизация не функционала (3.21), а функционала

$$\overline{I}(v) = \iint_{\Omega} \left(\overline{p} (gradv)^2 + \overline{\gamma}v^2 \right) d\Omega + \iint_{S_3} \overline{\beta} v^2 dS - 2 \iint_{\Omega} \overline{f} v d\Omega - 2 \iint_{S_2} \overline{\Theta} v dS - 2 \iint_{S_3} \overline{\beta} \overline{u}_{\beta} v dS ,$$

так как кусочно-постоянные функции \overline{p} , $\overline{\gamma}$, \overline{f} , $\overline{\beta}$, \overline{u}_{β} и $\overline{\theta}$ допустимы для вариационной постановки. Очевидно, что этот способ довольно удобен для тех параметров p, γ , f, β , u_{β} и θ , которые достаточно хорошо могут быть представлены в виде кусочно-постоянных функций на конечноэлементной сетке. Однако если эти параметры довольно сильно изменяются внутри конечных элементов, то более целесообразным становится другой способ представления параметров p, γ , f, β , u_{β} и θ .

Второй способ заключается в том, что параметры краевой задачи на каждом конечном элементе Ω_j заменяются своими интерполянтами p^{μ} , γ^{μ} , f^{μ} , β^{μ} , u^{μ}_{β} и θ^{μ} . Например, под интерполянтом p^{μ} параметра p на двумерном конечном элементе Ω_k мы понимаем функцию

$$p^{\mu}(x,y) = \sum_{\nu} p(\hat{x}_{\nu}, \hat{y}_{\nu}) \hat{\psi}_{\nu}(x,y) , \qquad (3.50)$$

где $\{\hat{x}_{\nu}, \hat{y}_{\nu}\}$ – узлы конечного элемента Ω_k ; $\hat{\psi}_{\nu}$ – его локальные базисные функции. Аналогично определяются γ^{μ} , f^{μ} , β^{μ} , u^{μ}_{β} и θ^{μ} .

Очевидно, что p^{μ} , γ^{μ} , f^{μ} , β^{μ} , u^{μ}_{β} и θ^{μ} точнее представляют быстро меняющиеся исходные функции, чем кусочно-постоянные функции \overline{p} , $\overline{\gamma}$, \overline{f} , $\overline{\beta}$, \overline{u}_{β} и $\overline{\theta}$. Однако для интерполянтов сложнее считаются интегралы в формулах для соответствующих вкладов в локальные матрицы и векторы, и арифметические выражения для них после вычисления интегралов получаются более громоздкими. Поэтому иногда наиболее выгодным оказывается компромиссный вариант: на интерполянты заменяются только те из параметров p, γ , f, β , u_{β} и θ , которые для рассматриваемого класса задач могут достаточно сильно изменять свои значения на конечных элементах, а остальные параметры заменяются кусочно-постоянными функциями (постоянными на конечных элементах). Заметим, что интерполирование типа (3.50) производится на конечных элементах, поэтому разрывные на границах элементов функции p, γ , f, β , u_{β} и θ в результате такой интерполяции также должны остаться разрывными на границах Ω_k .

Возможны и другие способы представления параметров p, γ , f, β , u_{β} и θ в функционале (3.14). Однако эти способы, как правило, требуют использования численного интегрирования на конечных элементах Ω_k , что приводит к большому числу арифметических операций (для получения приемлемого по точности решения). Мы считаем, что лучше воспользоваться любым из двух описанных выше способов (или использовать для представления некоторых параметров полиномов других порядков) – это дает более экономичный по времени счета на ЭВМ алгоритм, хотя и потребует несколько большего количества ручного труда на вычисление соответствующих интегралов.

3.3. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ, КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНЫМИ И КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИМИ БАЗИСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В данном пункте мы рассмотрим основные этапы построения конечноэлементных решений одномерных эллиптических краевых задач при аппроксимации пространства H^1 конечномерными подпространствами V^h кусочнолинейных, кусочно-квадратичных и кусочно-кубических функций.

Разобьем одномерную расчетную область $\Omega = (a, b)$ узлами $x_1, ..., x_n$ на конечные элементы $\Omega_k = (x_k, x_{k+1}), k=1, ..., n-1$. Обозначим через $h_k = x_{k+1} - x_k$ длину элемента Ω_k . Поставим в соответствие каждому внутреннему узлу x_i кусочнолинейную функцию $\Psi_i(x)$, определяемую соотношениями

$$\Psi_{i}(x) = \begin{cases}
0, & x \leq x_{i-1} \\
\frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_{i} \\
\frac{x_{i+1} - x}{h_{i}}, & x_{i} \leq x \leq x_{i+1} \\
0, & x \geq x_{i+1}
\end{cases}$$
(3.51)

а граничным узлам x_1 и x_n – функции $\psi_1(x)$ и $\psi_n(x)$, определяемые соотношениями

$$\Psi_{1}(x) = \begin{cases} \frac{x_{2} - x}{h_{1}}, & x_{1} \le x \le x_{2} \\ 0, & x \ge x_{2} \end{cases}, \quad \Psi_{n}(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{h_{n-1}}, & x_{n-1} \le x \le x_{n} \end{cases}.$$
(3.52)

1-



Вид этих функций приведен на рис. 18. Нетрудно убедиться, что любая непрерывная кусочно-линейная на $\bigcup_{k} \Omega_{k}$ функция v^{h} (линейная на каждом конечном элементе Ω_k) может быть представлена в виде линейной комбинации определяемых соотношениями (3.51) и (3.52) функций Ψ_i :

$$v^h = \sum_{i=1}^n q_i \Psi_i, \tag{3.53}$$

причем веса q_i в соотношении (3.53) фактически являются значениями функции v^h в узлах x_i . Таким образом, функции Ψ_i являются базисными функциями конечномерного пространства V^h кусочно-линейных на Ω (и линейных на каждом Ω_k) функций v^h и размерность этого пространства совпадает с числом узлов в конечноэлементной сетке. При этом если на границе Ω не задано краевое условие первого рода, то $V_E^h = V_0^h = V^h$. Если же в каком-либо из граничных узлов x_1 или x_n или в них обоих задано краевое условие первого рода, то размерность V_E^h и V_0^h на 1 или на 2 меньше размерности V^h (и числа узлов в сетке), так как для всех элементов $v_E^h \in V_E^h$ и $v_0^h \in V_0^h$ должно выполняться условие $v_E^h \Big|_{S_1} = u_g$ и $v_0^h \Big|_{S_i} = 0$, и это означает, что в разложениях v_E^h и v_0^h по базису { ψ_i } одна или две компоненты векторов весов должны быть фиксированы и равны соответственно *u_g* или нулю.

Итак, нам необходимо решить систему линейных уравнений (3.42) для неизвестных *q_i* (*i*∈*N*₀), являющихся весами в разложении приближенного решения u^h по базисным функциям (3.51)-(3.52) (напомним, что N_0 – множество номеров узлов сетки, в которое входят все номера узлов, не лежащих на границе S_1). Обратим внимание на то, что границы S_1 , S_2 и S_3 в одномерных задачах вырождаются в граничные узлы и интегралы по S_2 и S_3 в уравнении (3.42) – это значения подынтегральных выражений в соответствующих граничных узлах.

Матрицу и вектор правой части системы (3.42) будем собирать из локальных матриц и векторов, определяющих вклады в глобальную матрицу и вектор системы (3.42) от одного из конечных элементов $\Omega_k = (x_k, x_{k+1})$.

Введем на конечном элементе Ω_k локальную нумерацию узлов: $\hat{x}_1 = x_k$, $\hat{x}_2 = x_{k+1}$. На этом конечном элементе <u>не-</u> нулевыми являются только две базисные функции Ψ_k и Ψ_{k+1} , которые в соответствии с локальной нумерацией узлов обозначим через $\hat{\psi}_1$ и $\hat{\psi}_2$. Вид этих функций на конечном элементе Ω_k показан на рис. 19. Аналогично и веса q_k и q_{k+1} в разложении приближенного решения u^h по базисным функциям Ψ_k и Ψ_{k+1} на конечном элементе Ω_k обозначим в соответствии с локальной нумерацией узлов через \hat{q}_1 и \hat{q}_2 . Тогда вклад от конечного элемента Ω_k в систему (3.42) может быть представлен в виде



Рис. 19. Вид локальных базисных функций $\hat{\Psi}_1$ и $\hat{\Psi}_2$ на конечном элементе Ω_k для случая аппроксимации пространства H^1 его подпространством V^h кусочно-линейных функций

$$\hat{B}\hat{Q} + \hat{C}\hat{Q} - \hat{G},\tag{3.54}$$

где $\hat{Q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2)^{\mathrm{T}}$ – локальный вектор неизвестных. Слагаемые $\hat{B}\hat{Q}$, $\hat{C}\hat{Q}$ и \hat{G} в выражении (3.54) определяют вклады от конечного элемента Ω_k в слагаемые $\sum_{j=1}^{n} \int p \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j d\Omega$, $\sum_{j=1}^{n} \int \gamma \psi_i \psi_j d\Omega$ и $\int f \psi_i d\Omega$ соответственно (см. систему (3.42)). Компоненты локальных матриц \hat{B} и \hat{C} и вектора \hat{G} легко по-

систему (3.42)). Компоненты локальных матриц В и С и вектора G легко получить из следующих выражений:

$$\hat{B}\hat{Q} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \int \\ x_k \end{pmatrix} p \frac{d\hat{\psi}_1}{dx} \frac{d\hat{\psi}_1}{dx} dx \\ \int \\ x_k \end{pmatrix} \cdot \hat{q}_1 + \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \int \\ x_k \end{pmatrix} p \frac{d\hat{\psi}_2}{dx} \frac{d\hat{\psi}_1}{dx} dx \\ \int \\ x_k \end{pmatrix} \cdot \hat{q}_1 + \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \int \\ x_k \end{pmatrix} p \frac{d\hat{\psi}_2}{dx} \frac{d\hat{\psi}_2}{dx} dx \\ \int \\ x_k \end{pmatrix} \cdot \hat{q}_2 \end{pmatrix},$$
(3.55)

$$\hat{C}\hat{Q} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_1 dx \\ x_k \end{pmatrix} \cdot \hat{q}_1 + \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 dx \\ x_k \end{pmatrix} \cdot \hat{q}_2 \\ \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_1 dx \\ y \hat{\psi}_1 dx \end{pmatrix} \cdot \hat{q}_1 + \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_2 dx \\ x_k \end{pmatrix} \cdot \hat{q}_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y \hat{\psi}_1 dx \\ x_k \\ x_{k+1} \\ y \hat{\psi}_2 dx \\ x_k \end{pmatrix} .$$
(3.56)
$$(3.57)$$

Поскольку на Ω_k

$$\hat{\Psi}_1 = (x_{k+1} - x)/h_k, \qquad \hat{\Psi}_2 = (x - x_k)/h_k$$
(3.58)

(см. рис. 19), то $d\hat{\psi}_1/dx = -1/h_k$, $d\hat{\psi}_2/dx = 1/h_k$, и тогда, заменяя *p* на Ω_k усредненным значением \overline{p} и учитывая, что $\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx = h_k$, из (3.55) получим

$$\hat{B}\hat{Q} = \begin{pmatrix} (\overline{p}/h_k) \cdot \hat{q}_1 - (\overline{p}/h_k) \cdot \hat{q}_2 \\ -(\overline{p}/h_k) \cdot \hat{q}_1 + (\overline{p}/h_k) \cdot \hat{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{p}/h_k & -\overline{p}/h_k \\ -\overline{p}/h_k & \overline{p}/h_k \end{pmatrix} \hat{Q},$$

т.е.

$$\hat{B} = \frac{\overline{p}}{h_k} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
(3.59)

Чтобы получить выражения для компонент локальной матрицы \hat{C} , необходимо вычислить интегралы вида $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \gamma \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j dx$. Если заменить γ на Ω_k ус-

редненным значением $\overline{\gamma}$, то эти интегралы примут вид $\overline{\gamma} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j dx$. Конечно,

такого рода интегралы для линейных на Ω_k базисных функций можно легко вычислить напрямую, подставляя в них значения базисных функций $\hat{\psi}_i$ и $\hat{\psi}_j$ из соотношения (3.58). Но при использовании в качестве базисных функций полиномов более высоких порядков подынтегральные выражения станут более громоздкими, и поэтому для вычисления соответствующих интегралов (в том чис-

ле и для компонент $\int_{x_k}^{x_{k+1}} p \frac{d\hat{\psi}_i}{dx} \frac{d\hat{\psi}_j}{dx} dx$ матрицы жесткости) становится целесооб-

разным использование следующего технического приема, позволяющего значительно упростить выкладки при вычислении компонент локальных матриц жесткости и массы. Этот прием мы продемонстрируем на примере вычисления интегралов вида $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j dx$ для линейных базисных функций на $\Omega_k = (x_k, x_{k+1})$.

Заключается он в следующем. Проводится замена переменной x на переменную $\xi = (x - x_k)/h_k$, т.е.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \hat{\psi}_i \, \hat{\psi}_j \, dx = \int_{0}^{1} \hat{\psi}_i(x(\xi)) \hat{\psi}_j(x(\xi)) h_k d\xi \quad . \tag{3.60}$$

Но тогда функция $\hat{\psi}_1(x(\xi))$ является линейной функцией переменной ξ и может быть обозначена через $\hat{\varphi}_1(\xi)$, причем эта функция $\hat{\varphi}_1(\xi)$ определена на интервале (0, 1) и равна единице при $\xi=0$ и нулю при $\xi=1$, т.е. $\hat{\varphi}_1(\xi)=1-\xi$. Аналогично $\hat{\psi}_2(x(\xi))$ может быть обозначена через $\hat{\varphi}_2(\xi)$ и $\hat{\varphi}_2(\xi)=\xi$ на интервале (0, 1). Тогда из (3.60)

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \hat{\psi}_1 \, \hat{\psi}_1 \, dx = \int_{0}^{1} \hat{\phi}_1(\xi) \hat{\phi}_1(\xi) h_k d\xi = h_k \int_{0}^{1} (1-\xi)^2 d\xi = \frac{h_k}{3}$$

Аналогично вычисляются все остальные интегралы типа (3.60). В результате получим

$$\hat{C}\cdot\hat{Q} = \begin{pmatrix} (\overline{\gamma}h_k/3)\hat{q}_1 + (\overline{\gamma}h_k/6)\hat{q}_2\\ (\overline{\gamma}h_k/6)\hat{q}_2 + (\overline{\gamma}h_k/3)\hat{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\gamma}h_k/3 & \overline{\gamma}h_k/6\\ \overline{\gamma}h_k/6 & \overline{\gamma}h_k/3 \end{pmatrix} \cdot \hat{Q},$$

т.е.

$$\hat{C} = \frac{\overline{\gamma}h_k}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
(3.61)

При вычислении компонент локального вектора \hat{G} (см. (3.57)) будем считать, что функция f на Ω_k заменяется своим интерполянтом $\hat{f}_1\hat{\psi}_1 + \hat{f}_2\hat{\psi}_2$ (где \hat{f}_1 и \hat{f}_2 – значения f в узлах x_k и x_{k+1} конечного элемента Ω_k). Тогда, учитывая вычисленные выше (при нахождении компонент локальной матрицы массы \hat{C}) значения интегралов вида (3.60), получаем

$$\hat{G} = \frac{h_k}{6} \begin{pmatrix} 2\hat{f}_1 + \hat{f}_2 \\ \hat{f}_1 + 2\hat{f}_2 \end{pmatrix}.$$
(3.62)

Отметим, что рассмотренный выше прием позволяет строить одномерные базисные функции на шаблонном интервале (0, 1). Действительно, элементы локальных матриц жесткости \hat{B} и массы \hat{C} произвольного конечного элемента Ω_k длины h_k могут быть вычислены через заданные на интервале (0, 1) шаблонные базисные функции $\hat{\varphi}_i(\xi)$ по формулам

$$\hat{b}_{ij} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \overline{p} \frac{d\hat{\psi}_i(x)}{dx} \frac{d\hat{\psi}_j(x)}{dx} dx = \overline{p} \int_0^1 \frac{d\hat{\phi}_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{d\hat{\phi}_j(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} h_k d\xi =$$

$$= \overline{p} \int_0^1 \frac{d\hat{\phi}_i}{d\xi} \frac{1}{h_k} \cdot \frac{d\hat{\phi}_j}{d\xi} \frac{1}{h_k} h_k d\xi = \frac{\overline{p}}{h_k} \int_0^1 \frac{d\hat{\phi}_i}{d\xi} \frac{d\hat{\phi}_j}{d\xi} d\xi ,$$
(3.63)

$$\hat{c}_{ij} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \bar{\gamma} \hat{\psi}_i(x) \hat{\psi}_j(x) dx = \bar{\gamma} h_k \int_0^1 \hat{\phi}_i(\xi) \cdot \hat{\phi}_j(\xi) d\xi \quad .$$
(3.64)

Аналогично могут быть получены формулы для вычисления компонент локального вектора \hat{G} через интегралы по интервалу (0, 1) от шаблонных базисных функций $\hat{\varphi}_i(\xi)$.

Соотношения (3.63)-(3.64) применимы при использовании базисных функций любого вида – квадратичных, кубических и т.д. Поэтому кусочно-полиномиальные базисные функции высоких порядков проще определить сразу на шаблонном элементе (0, 1) и для вычисления компонент локальных матриц использовать формулы (3.63) и (3.64).

Применим такую технику проведения конечноэлементной аппроксимации для кусочно-квадратичных базисных функций. Поскольку квадратичные полиномы одной переменной полностью определяются своими значениями в трех точках, поставим на шаблонном конечном элементе (0, 1) три узла с координатами $\xi_1=0, \xi_2=\frac{1}{2}$ и $\xi_3=1$. Каждому из этих узлов поставим в соответствие квадратичную базисную функцию $\hat{\phi}_v(\xi)$, равную единице в этом узле и нулю в двух остальных. Вид этих квадратичных функций показан на рис. 20. Поскольку квадратичный полином $\hat{\phi}_1(\xi)$ имеет в качестве своих корней точки $\xi=\frac{1}{2}$ и $\xi=1$, он может быть представлен в виде $\hat{\phi}_1(\xi)=d\cdot(\xi-\frac{1}{2})(\xi-1)$, а коэффициент d может быть легко найден из условия $\hat{\phi}_1(0)=1$, т.е. $1=d\cdot\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)$, откуда d=2

$$\hat{\varphi}_1(\xi) = 2(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)$$
 (3.65)

Также легко может быть получен аналитический вид двух других квадратичных полиномов

$$\hat{\varphi}_2(\xi) = -4\xi(\xi - 1), \tag{3.66}$$

$$\hat{\varphi}_3(\xi) = 2\xi \left(\xi - \frac{1}{2}\right). \tag{3.67}$$



Рис. 20. Вид квадратичных базисных функций $\hat{\phi}_1(\xi)$, $\hat{\phi}_2(\xi)$ и $\hat{\phi}_3(\xi)$ на шаблонном конечном элементе

Очевидно, что любой квадратичный полином может быть представлен в виде линейной комбинации определенных выше квадратичных полиномов $\hat{\varphi}_1(\xi)$, $\hat{\varphi}_2(\xi)$ и $\hat{\varphi}_3(\xi)$ – для этого достаточно взять в качестве коэффициентов этой линейной комбинации значения исходного квадратичного полинома в узлах шаблонного конечного элемента.

Из сказанного выше ясно, что каждый конечный элемент с кусочно-квадратичными базисными функциями должен иметь по три узла – два граничных и один внутренний. Поэтому при использовании кусочноквадратичных базисных функций конечноэлементная сетка строится, как правило,

следующим образом. Сначала задаются границы конечных элементов узлами $x_1, x_3, \ldots x_{2n+1}$, т.е. *k*-й конечный элемент имеет вид $\Omega_k = (x_{2k-1}, x_{2k+1})$. Затем вычисляются узлы $x_{2k} = (x_{2k-1} + x_{2k+1})/2$, являющиеся центрами конечных элементов Ω_k .

Вид глобальных кусочно-квадратичных базисных функций приведен на рис. 21. Эти функции строятся из шаблонных кусочно-квадратичных базисных функций $\hat{\varphi}_1(\xi)$, $\hat{\varphi}_2(\xi)$ и $\hat{\varphi}_3(\xi)$ с помощью замены переменной $\xi = (x - x_{2k-1})/h_k$ (где $h_k = x_{2k+1} - x_{2k-1} - d$ лина конечного элемента Ω_k). При этом функции $\psi_{2k}(x)$ отличны от нуля только на одном конечном элементе Ω_k и их прототипом является шаблонная функция $\hat{\varphi}_2(\xi)$. То же самое можно сказать о функциях $\psi_1(x)$ и $\psi_{2n+1}(x)$, соответствующих граничным узлам расчетной области Ω , – они отличны от нуля только на одном из конечных элементов Ω_1 или Ω_n и их прототипами являются шаблонные базисные функции $\hat{\varphi}_1(\xi)$ и $\hat{\varphi}_3(\xi)$ соответственно. Функции же $\hat{\psi}_{2k+1}$ для k=1, ..., n-1, соответствующие граничным узлам x_{2k+1} двух конечных элементов Ω_k и Ω_{k+1} , получаются в результате сшивки в узлах x_{2k+1} локальных базисных $\hat{\psi}_3(x)$ конечного элемента Ω_k и $\hat{\psi}_1(x)$ конечного элемента Ω_{k+1} (прототипами которых являются соответственно шаблонные базисные функции $\hat{\varphi}_3(\xi)$ и $\hat{\varphi}_1(\xi)$), и поэтому каждая из функций ψ_{2k+1} (k=1, ..., n-1) отлична от нуля на двух примыкающих к узлу x_{2k+1} конечных элементах Ω_k и Ω_{k+1} .



Элементы локальных матриц жесткости \hat{B} и массы \hat{C} конечных элементов $\Omega_k = (x_{2k-1}, x_{2k+1})$ с квадратичными базисными функциями могут быть легко вычислены по формулам типа (3.63)–(3.64) через интегралы от шаблонных квадратичных базисных функций $\hat{\varphi}_1(\xi)$, $\hat{\varphi}_2(\xi)$ и $\hat{\varphi}_3(\xi)$ и их производных

$$\hat{b}_{ij} = \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k-1}+h_k} \overline{p} \frac{d\hat{\psi}_i(x)}{dx} \frac{d\hat{\psi}_j(x)}{dx} dx = \frac{\overline{p}}{h_k} \int_0^1 \frac{d\hat{\varphi}_i(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\hat{\varphi}_j(\xi)}{d\xi} d\xi , \qquad (3.68)$$

$$\hat{c}_{ij} = \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k-1}+h_k} \int_{y_{2k-1}} \hat{\nabla} \hat{\psi}_i(x) \hat{\psi}_j(x) dx = \bar{\gamma} h_k \int_{0}^{1} \hat{\phi}_i(\xi) \cdot \hat{\phi}_j(\xi) d\xi .$$
(3.69)

Подставляя выражения (3.65)–(3.67) в соотношения (3.68) и (3.69), получим

$$\hat{B} = \frac{\overline{p}}{3h_k} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \hat{C} = \frac{\overline{\gamma}h_k}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
(3.70)

Столь же просто вычисляются компоненты локального вектора \hat{G} конечного элемента $\Omega_k = (x_{2k-1}, x_{2k+1})$. Заменяя на Ω_k функцию f её квадратичным интерполянтом $\hat{f}_1 \hat{\psi}_1 + \hat{f}_2 \hat{\psi}_2 + \hat{f}_3 \hat{\psi}_3$, получаем

$$\hat{G} = \frac{h_k}{30} \begin{pmatrix} 4\hat{f}_1 + 2\hat{f}_2 - \hat{f}_3 \\ 2\hat{f}_1 + 16\hat{f}_2 + 2\hat{f}_3 \\ -\hat{f}_1 + 2\hat{f}_2 + 4\hat{f}_3 \end{pmatrix}.$$
(3.71)

Аналогично могут быть получены локальные матрицы жесткости \hat{B} и массы \hat{C} и вектор правой части \hat{G} для так называемых четырехузловых конечных элементов $\Omega_k = (x_{3k-2}, x_{3k+1})$ с кусочно-кубическими базисными функциями. Шаблонные базисные функции $\hat{\varphi}_1(\xi)$, $\hat{\varphi}_2(\xi)$, $\hat{\varphi}_3(\xi)$ и $\hat{\varphi}_4(\xi)$ таких элементов показаны на рис. 22. Вид этих кубических полиномов легко получить, используя значения их корней:

$$\hat{\varphi}_{1}(\xi) = -\frac{9}{2} \left(\xi - \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{2}{3} \right) \left(\xi - 1 \right), \qquad \hat{\varphi}_{2}(\xi) = \frac{27}{2} \xi \left(\xi - \frac{2}{3} \right) \left(\xi - 1 \right),
\hat{\varphi}_{3}(\xi) = -\frac{27}{2} \xi \left(\xi - \frac{1}{3} \right) \left(\xi - 1 \right), \qquad \hat{\varphi}_{4}(\xi) = \frac{9}{2} \xi \left(\xi - \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{2}{3} \right).$$
(3.72)



четырехузловом шаблонном конечном элементе

Компоненты \hat{B} , \hat{C} и \hat{G} легко вычисляются с помощью соотношений, аналогичных (3.63)-(3.64). В результате получаются следующие выражения:

$$\hat{B} = \frac{\overline{p}}{40h_k} \begin{pmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{pmatrix}, \qquad \hat{C} = \frac{\overline{\gamma}h_k}{1680} \begin{pmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{pmatrix},$$

$$\hat{G} = \frac{h_k}{1680} \begin{pmatrix} 128\hat{f}_1 + 99\hat{f}_2 - 36\hat{f}_3 + 19\hat{f}_4 \\ 99\hat{f}_1 + 648\hat{f}_2 - 81\hat{f}_3 - 36\hat{f}_4 \\ -36\hat{f}_1 - 81\hat{f}_2 + 648\hat{f}_3 + 99\hat{f}_4 \\ 19\hat{f}_1 - 36\hat{f}_2 + 99\hat{f}_3 + 128\hat{f}_4 \end{pmatrix}$$
(3.73)

при условии, что параметры p и γ заменены на Ω_k своими средними значениями \overline{p} и $\overline{\gamma}$, а функция f заменена на Ω_k своим кубическим интерполянтом $\hat{f}_1\hat{\psi}_1 + \hat{f}_2\hat{\psi}_2 + \hat{f}_3\hat{\psi}_3 + \hat{f}_4\hat{\psi}_4$ (\hat{f}_i – значения f в узлах конечного элемента Ω_k , $\hat{\psi}_i$ – его локальные базисные функции).

Возможен и другой способ задания кусочно-кубических функций на конечных элементах Ω_k . Четыре коэффициента кубического полинома на конечном элементе Ω_k могут быть определены по двум его значениям в граничных узлах Ω_k и двум значениям его первой производной в тех же граничных узлах. В результате на конечном элементе Ω_k не будет внутренних узлов (т.е. $\Omega_k = (x_k, x_{k+1})$), и поэтому такие конечные элементы с кубическими базисными функциями называют <u>двухузловыми</u>.

При использовании двухузловых конечных элементов с кубическими базисными функциями также удобно воспользоваться техникой вычисления локальных матриц конечных элементов по шаблонным базисным функциям. В этом случае вводятся четыре шаблонных базисных функции $\hat{\varphi}_1(\xi)$, $\hat{\varphi}_2(\xi)$, $\hat{\varphi}_3(\xi)$ и $\hat{\varphi}_4(\xi)$, причем функция $\hat{\varphi}_1(\xi)$ равна единице при $\xi=0$ и нулю при $\xi=1$ и имеет нулевые производные при $\xi=0$ и $\xi=1$, функция $\hat{\varphi}_2(\xi)$ имеет производную $\hat{\varphi}'_2(0)=1$ и $\hat{\varphi}'_2(1)=0$ и нулевые значения при $\xi=0$ и $\xi=1$, функция $\hat{\varphi}_3(\xi)$ равна нулю при $\xi=0$ и единице при $\xi=1$ и имеет нулевые производные при $\xi=0$ и $\xi=1$, а функция $\hat{\varphi}_4(\xi)$ имеет производную $\hat{\varphi}'_4(0)=0$ и $\hat{\varphi}'_4(1)=1$ и нулевые значения при $\xi=0$ и $\xi=1$. Вид этих шаблонных функций показан на рис. 23.



Рис. 23. Вид кубических базисных функций на двухузловом шаблонном конечном элементе

Коэффициенты α_i^{v} каждого из таких кубических полиномов $\hat{\varphi}_i(\xi) = \alpha_i^0 + \alpha_i^1 \xi + \alpha_i^2 \xi^2 + \alpha_i^3 \xi^3$ могут быть легко получены по их значениям и значениям их производных в узлах шаблонного конечного элемента. Так для функции $\hat{\varphi}_1(\xi)$ (точнее, для её коэффициентов α_1^{v}) получаем систему

$$1 = \hat{\varphi}_{1}(0) = \alpha_{1}^{0} + \alpha_{1}^{1} \cdot 0 + \alpha_{1}^{2} \cdot 0 + \alpha_{1}^{3} \cdot 0,$$

$$0 = \hat{\varphi}_{1}'(0) = 0 + \alpha_{1}^{1} + \alpha_{1}^{2} \cdot 0 + \alpha_{1}^{3} \cdot 0,$$

$$0 = \hat{\varphi}_{1}(1) = \alpha_{1}^{0} + \alpha_{1}^{1} \cdot 1 + \alpha_{1}^{2} \cdot 1 + \alpha_{1}^{3} \cdot 1,$$

$$0 = \hat{\varphi}_{1}'(1) = 0 + \alpha_{1}^{1} + \alpha_{1}^{2} \cdot 2 + \alpha_{1}^{3} \cdot 3.$$

(3.74)

Аналогичные системы могут быть получены для коэффициентов оставшихся трех кубических полиномов, причем матрицы у всех этих систем одинаковые и совпадают с матрицей системы (3.74). Поэтому все четыре системы для коэффициентов α_i^{v} четырех кубических полиномов $\hat{\varphi}_i(\xi)$ можно объединить в одно матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0 & \alpha_4^0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \alpha_4^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(3.75)

Из матричного уравнения (3.75) сразу следует, что матрица коэффициентов α_i^{v} функций $\hat{\varphi}_i(\xi)$ может быть вычислена как обратная матрица системы (3.74), являющейся первым сомножителем в левой части матричного уравнения (3.75):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0 & \alpha_4^0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \alpha_4^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\hat{\varphi}_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \ \hat{\varphi}_2(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \ \hat{\varphi}_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \ \hat{\varphi}_4(\xi) = -\xi^2 + \xi^3.$$
 (3.76)

Очевидно, что для кубических двухузловых конечных элементов в каждом узле *x*_k конечноэлементной сетки должно быть определено две глобальные базисные функции $\psi_{2k-1}(x)$ и $\psi_{2k}(x)$ (узлы x_k разбивают в этом случае область на конечные элементы $\Omega_k = (x_k, x_{k+1})$, и узлов внутри конечных элементов Ω_k нет). Вид глобальных кусочно-кубических базисных функций на двухузловых конечных элементах показан на рис. 24. Эти функции строятся из шаблонных локальных базисных функций (3.76) с помощью стандартной замены переменной $\xi = (x - x_k)/h_k$ и сшивки локальных базисных функций граничащих друг с другом граничных элементов. Так глобальная базисная функция $\psi_{2k-1}(x)$ (k=2,..., n-1), соответствующая узлу x_k (являющемуся внутренним узлом сетки и граничным узлом конечных элементов Ω_{k-1} и Ω_k) и равная единице в этом узле, получается в результате сшивки локальной базисной функции $\hat{\psi}_3(x)$ конечного элемента Ω_{k-1} с локальной базисной функцией $\hat{\psi}_1(x)$ конечного элемента Ω_k . Функция же $\Psi_{2k}(x)$, соответствующая тому же узлу x_k и имеющая равную единице производную при $x=x_k$ (сама $\psi_{2k}(x)$ равна нулю при $x=x_k$), получается в результате сшивки локальной базисной функции $\hat{\psi}_4(x)$ конечного элемента Ω_{k-1} с локальной базисной функцией $\hat{\psi}_2(x)$ конечного элемента Ω_k . Очевидно, что в таком случае нечетные компоненты вектора Q, являющегося решением конечноэлементной СЛАУ, будут давать приближенные значения искомой функции u в узлах сетки, а четные компоненты Q – приближенные значения du/dx в узлах сетки.



Обратим внимание на очень важную деталь, связанную с построением локальных базисных функций $\hat{\psi}_2(x)$ и $\hat{\psi}_4(x)$ (и соответственно глобальных базисных функций $\psi_{2k}(x)$). Чтобы локальная базисная функция $\hat{\psi}_2(x)$ имела равную единице производную в левом узле конечного элемента, она должна быть не просто получена из шаблонной функции $\hat{\varphi}_2(\xi)$ заменой переменной ξ на x, а иметь вид $\hat{\psi}_2(x) = h_k \hat{\varphi}_2(\xi(x))$ (h_k – длина конечного элемента Ω_k , на котором $\hat{\psi}_2(x)$). Действительно, $d\hat{\psi}_2(x)/dx = h_k \cdot d\hat{\varphi}_2(\xi(x))/dx =$ определяется $=h_k \cdot (d\hat{\varphi}_2(\xi)/d\xi) \cdot (d\xi/dx) = h_k \cdot 1 \cdot (1/h_k) = 1$ (в то время, как $d\hat{\varphi}_2(\xi(x))/dx = 1/h_k$). и $\hat{\psi}_{4}(x)$ должна быть построена Аналогично $\hat{\varphi}_{4}(\xi)$ ИЗ В виде $\hat{\psi}_4(x) = h_k \hat{\varphi}_4(\xi(x))$.Поэтому при вычислении локальных матриц жесткости и массы и вектора правой части через шаблонные функции $\hat{\varphi}_1(\xi)$, $\hat{\varphi}_2(\xi)$, $\hat{\varphi}_3(\xi)$ и $\hat{\phi}_4(\xi)$ мы должны учесть эту особенность построения базисных функций с четными номерами, заменив в формулах (3.63)-(3.64) функции $\hat{\phi}_2(\xi)$ и $\hat{\phi}_4(\xi)$ на $h_k \hat{\phi}_2(\xi)$ и $h_k \hat{\phi}_4(\xi)$. Таким образом,

$$\hat{b}_{11} = \frac{\overline{p}}{h_k} \int_0^1 \frac{d\hat{\varphi}_1}{d\xi} \frac{d\hat{\varphi}_1}{d\xi} d\xi, \qquad \hat{b}_{12} = \frac{\overline{p}}{h_k} \int_0^1 \frac{d\hat{\varphi}_1}{d\xi} h_k \frac{d\hat{\varphi}_2}{d\xi} d\xi, \\ \hat{b}_{13} = \frac{\overline{p}}{h_k} \int_0^1 \frac{d\hat{\varphi}_1}{d\xi} \frac{d\hat{\varphi}_3}{d\xi} d\xi, \qquad \hat{b}_{14} = \frac{\overline{p}}{h_k} \int_0^1 \frac{d\hat{\varphi}_1}{d\xi} h_k \frac{d\hat{\varphi}_4}{d\xi} d\xi, \qquad (3.77)$$
$$\hat{b}_{21} = \frac{\overline{p}}{h_k} \int_0^1 h_k \frac{d\hat{\varphi}_2}{d\xi} \frac{d\hat{\varphi}_1}{d\xi} d\xi, \qquad \hat{b}_{22} = \frac{\overline{p}}{h_k} \int_0^1 h_k \frac{d\hat{\varphi}_2}{d\xi} h_k \frac{d\hat{\varphi}_2}{d\xi} d\xi$$

и т.д. Вычисляя интегралы в выражениях (3.77) с учетом того, что функции $\hat{\varphi}_i(\xi)$ определяются соотношениями (3.76), получаем

$$\hat{B} = \frac{\overline{p}}{30h_k} \begin{pmatrix} 36 & 3h_k & -36 & 3h_k \\ 3h_k & 4h_k^2 & -3h_k & -h_k^2 \\ -36 & -3h_k & 36 & -3h_k \\ 3h_k & -h_k^2 & -3h_k & 4h_k^2 \end{pmatrix}.$$
(3.78)

Аналогично вычисляются и компоненты локальной матрицы массы

$$\hat{C} = \frac{\overline{\gamma}h_k}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22h_k & 54 & -13h_k \\ 22h_k & 4h_k^2 & 13h_k & -3h_k^2 \\ 54 & 13h_k & 156 & -22h_k \\ -13h_k & -3h_k^2 & -22h_k & 4h_k^2 \end{pmatrix}.$$
(3.79)

Отметим, что построенные выше кусочно-кубические базисные функции на двухузловых конечных элементах имеют непрерывные производные $d\psi_i/dx$ на всей расчетной области Ω и поэтому порождают конечномерное пространство V^h кусочно-кубических функций с непрерывной производной, т.е. V^h фактически является подпространством гильбертова пространства H^2 (H^2 – гильбертово пространство функций, имеющих суммируемые с квадратом производные до второго порядка включительно). Конечные элементы, у которых базисные функции строятся только по их значениям в узлах сетки, называют <u>лагранжевыми</u>, а конечные элементы, у которых базисные функции строятся не только по их значениям в узлах сетки, но и по значениям их производных, называют эрмитовыми /11/.

Занесение локальных матриц жесткости и массы и локального вектора правой части в глобальную матрицу и вектор правой части конечноэлементной СЛАУ проводится по соответствию локальной и глобальной нумераций базисных функций на обрабатываемом конечном элементе. Заметим, что для лагранжевых конечных элементов нумерация базисных функций совпадает с нумерацией узлов сетки, и поэтому занесение компонент локальных матриц и векторов в глобальные может проводится по соответствию локальной и глобальной нумерации узлов. Для эрмитовых же конечных элементов число базисных функций не совпадает с числом узлов в сетке (как в целом, так и на каждом конечном элементе), и поэтому для них сборка глобальной матрицы и вектора из локальных может осуществляться только по соответствию глобальной и локальной и ло-кальной нумерации базисных функций.

После занесения в глобальную матрицу и вектор правой части конечноэлементной СЛАУ вкладов от всех конечных элементов Ω_k должны быть учтены заданные на границе расчетной области Ω краевые условия.

В одномерном случае краевые условия третьего рода учитываются для лагранжевых конечных элементов добавкой значения β к диагональному элементу строки матрицы конечноэлементной СЛАУ, соответствующей узлу сетки с заданным в нем краевым условием третьего рода, и значения βu_{β} к соответствующей компоненте вектора правой части. Это непосредственно следует из вида системы конечноэлементных уравнений (3.42) – в граничном узле не равна нулю только одна соответствующая этому узлу базисная функция. Краевое условие второго рода учитывается добавкой θ к соответствующей компоненте глобального вектора правой части. Для эрмитовых конечных элементов значения β , βu_{β} или θ заносятся в ту строку, которая соответствует глобальной базисной функции, равной единице в обрабатываемом граничном узле.

Учет краевых условий первого рода основан на том, что для базисных функций, равных единице в узлах, лежащих на границе S_1 , уравнения типа (3.42) вообще не должны формироваться. Для этих базисных функций уравнения в конечноэлементной СЛАУ формируются на основе соотношения (3.43), т.е. в виде $q_i = u_g$.

3.4. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Как уже было показано в предыдущем пункте, для вычисления компонент глобальной матрицы конечноэлементной СЛАУ в принципе нет необходимости сроить глобальные кусочно-полиномиальные базисные функции Ψ_i конечномерного пространства V^h , на котором ищется МКЭ-решение u^h в виде $u^h = \sum_i q_i \Psi_i$. Как правило, бывает вполне достаточно определить эти базисные

функции Ψ_i на отдельных конечных элементах, т.е. построить локальные базисв виде полиномов пространственных координат опреденые функции $\hat{\Psi}_{v}$ ленного порядка. Глобальные же базисные функции получаются естественным образом сшивкой локальных базисных функций соседних конечных элементов, причем сшиваются те локальные базисные функции (из разных конечных элементов), которые соответствуют одному и тому же узлу в глобальной нумерации, а при использовании эрмитовых конечных элементов учитывается и то, какое значение аппроксимируется с помощью рассматриваемой базисной функции: значение в узле самого решения и или значение какой-либо из его производных (в двумерном случае это может быть первая производная по x, первая производная по *y*, смешанная производная по *x* и *y* и т.д.). При этом необходимо проверить лишь то, что полученные таким образом глобальные базисные функции обеспечивают согласованность всех конечных элементов (при решении эллиптических краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка для согласованности конечных элементов достаточно непрерывности глобальных кусочно-полиномиальных базисных функций на границах конечных элементов), а также то, что их линейные комбинации представляют любые кусочно-полиномиальные функции требуемого вида. В дальнейшем мы будем использовать именно такой способ проведения конечноэлементной аппроксимации исходной краевой задачи.

Рассмотрим аппроксимацию двумерной эллиптической краевой задачи на прямоугольной сетке. Для описания расчетной области Ω и разбиения ее на конечные элементы можно применять те же самые подходы, которые были рассмотрены в предыдущей главе при использовании МКО для решения эллиптических краевых задач в составных прямоугольных областях (см. п.2.2). При этом ячейки дискретизации Ω_{ii} , на которые разбивалась расчетная область Ω при использовании МКО, в методе конечных элементов являются конечными элементами, по которым вычисляются вклады в матрицу и правую часть системы (3.42).

Очень часто в качестве локальных базисных функций на прямоугольнике $\Omega_{ii} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_i, y_{i+1})$ используют так называемые билинейные базисные функции. Эти функции строятся следующим образом. На интервале (x_i, x_{i+1}) определяются две линейные одномерные функции

$$\hat{X}_1(x) = (x_{i+1} - x)/h_x, \quad \hat{X}_2(x) = (x - x_i)/h_x, \quad h_x = x_{i+1} - x_i.$$
 (3.80)

Аналогично на интервале (y_i, y_{i+1}) определяются линейные функции

$$\hat{Y}_{1}(y) = (y_{j+1} - y)/h_{y}, \quad \hat{Y}_{2}(y) = (y - y_{j})/h_{y}, \quad h_{y} = y_{j+1} - y_{j}. \quad (3.81)$$

Локальные базисные функции на конечном элементе $\Omega_{ij} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ представляются в виде произведения функций (3.80) и (3.81):

$$\hat{\psi}_{1}(x,y) = \hat{X}_{1}(x) \cdot \hat{Y}_{1}(y), \quad \hat{\psi}_{2}(x,y) = \hat{X}_{2}(x) \cdot \hat{Y}_{1}(y),
\hat{\psi}_{3}(x,y) = \hat{X}_{1}(x) \cdot \hat{Y}_{2}(y), \quad \hat{\psi}_{4}(x,y) = \hat{X}_{2}(x) \cdot \hat{Y}_{2}(y).$$
(3.82)

Поскольку функции $\hat{\psi}_{y}(x,y)$ линейны по каждой из переменных x и y, их называют билинейными функциями.

Очевидно, что функция $\hat{\psi}_1(x,y)$ равна единице в узле $\{x_i, y_i\}$ и нулю во всех остальных вершинах конечного элемента Ω_{ij} ; функция $\hat{\Psi}_2(x,y)$ равна единице в узле $\{x_{i+1}, y_i\}$ и нулю во всех остальных вершинах Ω_{ij} ; функция $\hat{\psi}_3(x, y)$ равна единице в узле $\{x_i, y_{i+1}\}$ и нулю во всех остальных вершинах Ω_{ii} ; функция $\hat{\psi}_4(x,y)$ равна единице в узле $\{x_{i+1}, y_{i+1}\}$ и нулю во всех остальных вершинах Ω_{ii} .

При использовании билинейных базисных функций (3.82) очень легко вычисляются компоненты локальной матрицы жесткости \hat{B} и массы \hat{C} . Для этого достаточно предварительно вычислить интегралы вида $\int_{a}^{x_i+h_x} \frac{d\hat{X}_{\lambda}}{dx} \frac{d\hat{X}_{\mu}}{dx} dx$ и

 $\int \hat{X}_{\lambda} \hat{X}_{\mu} dx$, которые фактически являются компонентами локальных матриц

жесткости и массы для одномерных конечных элементов с линейными базисными функциями (см. соотношения (3.55)-(3.61)). Тогда, если параметр p на конечном элементе Ω_{ij} заменить его осредненным значением \overline{p} и учесть, что

$$\int_{x_{i}}^{x_{i}+h_{x}} \left(\frac{d\hat{X}_{1}}{dx}\right)^{2} dx = \frac{1}{h_{x}}, \qquad \int_{x_{i}}^{x_{i}+h_{x}} \frac{d\hat{X}_{1}}{dx} \frac{d\hat{X}_{2}}{dx} dx = -\frac{1}{h_{x}}, \qquad \int_{x_{i}}^{x_{i}+h_{x}} \left(\frac{d\hat{X}_{2}}{dx}\right)^{2} dx = \frac{1}{h_{x}},$$

 $\int_{x_i} \hat{X}_1^2 dx = \frac{n_x}{3}, \quad \int_{x_i} \hat{X}_1 \hat{X}_2 dx = \frac{n_x}{6}, \quad \int_{x_i} \hat{X}_2^2 dx = \frac{n_x}{3}$ (аналогичный вид имеют и

интегралы от произведений функций $\hat{Y}_{\lambda}(y)$ и их производных), получим

$$\hat{b}_{11} = \overline{p} \int_{\Omega_{ij}} \left(\left(\frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega = \overline{p} \int_{x_i}^{x_i + h_x} \int_{y_j}^{y_j + h_y} \left(\left(\frac{\partial \hat{X}_1}{\partial x} \right)^2 \hat{Y}_1^2 + \hat{X}_1^2 \left(\frac{\partial \hat{Y}_1}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy =$$

$$= \overline{p} \left(\int_{x_i}^{x_i + h_x} \left(\frac{\partial \hat{X}_1}{\partial x} \right)^2 dx \cdot \int_{y_j}^{y_j + h_y} \hat{Y}_1^2 dy + \int_{x_i}^{x_i + h_x} \hat{X}_1^2 dx \cdot \int_{y_j}^{y_j + h_y} \left(\frac{d \hat{Y}_1}{dy} \right)^2 dy \right) = \frac{\overline{p}}{3} \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} \right) ,$$

$$\begin{split} \hat{b}_{12} &= \overline{p} \int_{\Omega_{ij}} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial y} \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial y} \right) d\Omega = \\ &= \overline{p} \int_{x_i}^{x_i + h_x} \int_{y_j}^{y_j + h_y} \left(\frac{\partial \hat{X}_1}{\partial x} \cdot \hat{Y}_1 \cdot \frac{\partial \hat{X}_2}{\partial x} \cdot \hat{Y}_1 + \hat{X}_1 \cdot \frac{\partial \hat{Y}_1}{\partial y} \cdot \hat{X}_2 \cdot \frac{\partial \hat{Y}_1}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \overline{p} \left(\int_{x_i}^{x_i + h_x} \frac{\partial \hat{X}_1}{\partial x} \frac{\partial \hat{X}_2}{\partial x} dx \cdot \int_{y_j}^{y_j + h_y} \hat{Y}_1^2 dy + \int_{x_i}^{x_i + h_x} \hat{X}_1 \hat{X}_2 dx \cdot \int_{y_j}^{y_j + h_y} \left(\frac{d \hat{Y}_1}{dy} \right)^2 dy \right) = \frac{\overline{p}}{3} \left(-\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{2h_y} \right) \end{split}$$

Аналогично вычисляются остальные компоненты локальной матрицы жесткости \hat{B} . Не менее просто вычисляются компоненты локальной матрицы массы (параметр γ также заменяем на Ω_{ii} его осредненным значением $\overline{\gamma}$)

$$\hat{c}_{11} = \bar{\gamma} \int_{\Omega_{ij}} \hat{X}_{1}^{2} \hat{Y}_{1}^{2} d\Omega = \bar{\gamma} \int_{x_{i}}^{x_{i}+h_{x}} \hat{X}_{1}^{2} dx \cdot \int_{y_{j}}^{y_{j}+h_{y}} \hat{Y}_{1}^{2} dy = \bar{\gamma} \frac{h_{x}h_{y}}{9} ,$$
$$\hat{c}_{12} = \bar{\gamma} \int_{\Omega_{ij}} \hat{X}_{1} \hat{X}_{2} \hat{Y}_{1}^{2} d\Omega = \bar{\gamma} \int_{x_{i}}^{x_{i}+h_{x}} \hat{X}_{1} \hat{X}_{2} dx \cdot \int_{y_{j}}^{y_{j}+h_{y}} \hat{Y}_{1}^{2} dy = \bar{\gamma} \frac{h_{x}h_{y}}{18} ,$$

и т.д. В результате получим

$$\hat{B} = \frac{\overline{\rho}}{3} \begin{pmatrix} \frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{2h_y} & \frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y} \\ -\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{2h_y} & \frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y} & \frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{h_y} \\ \frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y} & \frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{2h_y} \\ -\frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y} & \frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{2h_y} & \frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} \\ -\frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y} & \frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{2h_y} & \frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \overline{\gamma} \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
(3.83)

Локальный вектор правой части \hat{G} вычислим с учетом того, что функция f на конечном элементе Ω_{ij} представлена в виде билинейного интерполянта $\sum_{\nu=1}^{4} \hat{f}_{\nu} \hat{\psi}_{\nu}$, где \hat{f}_{ν} – значения f в вершинах Ω_{ij} . Тогда

$$\hat{G} = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4\hat{f}_1 + 2\hat{f}_2 + 2\hat{f}_3 + \hat{f}_4 \\ 2\hat{f}_1 + 4\hat{f}_2 + \hat{f}_3 + 2\hat{f}_4 \\ 2\hat{f}_1 + \hat{f}_2 + 4\hat{f}_3 + 2\hat{f}_4 \\ 2\hat{f}_1 + \hat{f}_2 + 4\hat{f}_3 + 2\hat{f}_4 \\ \hat{f}_1 + 2\hat{f}_2 + 2\hat{f}_3 + 4\hat{f}_4 \end{pmatrix}.$$
(3.84)

Вклады в глобальную матрицу и вектор правой части конечноэлементной СЛАУ от краевых условий третьего и второго рода также могут быть представлены в виде локальных матриц и векторов ребер, на которых заданы эти краевые условия. При этом на каждом ребре ненулевыми являются только две базисные функции $\hat{\psi}_1$ и $\hat{\psi}_2$, причем они линейны на этом ребре. Тогда локальная матрица ребра Г длины *h* с заданным на нем краевым условием третьего рода фактически является матрицей массы одномерного конечного элемента с линейными базисными функциями (считаем, что β =*const* на Г)

$$\hat{A}^{S_3} = \begin{pmatrix} \int \beta(\hat{\psi}_1)^2 d\Gamma & \int \beta \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 d\Gamma \\ \Gamma & \Gamma \\ \int \beta \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_1 d\Gamma & \int \beta(\hat{\psi}_2)^2 d\Gamma \\ \Gamma & \Gamma \end{pmatrix} = \frac{\beta h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
(3.85)

а локальный вектор \hat{G}^{S_3} этого ребра Γ при представлении u_{β} на Γ в виде разложения по базисным функциям $\hat{\psi}_1$ и $\hat{\psi}_2$ (т.е. $u_{\beta} = \hat{u}_{\beta 1} \hat{\psi}_1 + \hat{u}_{\beta 2} \hat{\psi}_2$) имеет вид

$$\hat{G}^{S_{3}} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} \beta(\hat{u}_{\beta 1}\hat{\psi}_{1} + \hat{u}_{\beta 2}\hat{\psi}_{2})\hat{\psi}_{1}d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \beta(\hat{u}_{\beta 1}\hat{\psi}_{1} + \hat{u}_{\beta 2}\hat{\psi}_{2})\hat{\psi}_{2}d\Gamma \end{pmatrix} = \frac{\beta h}{6} \begin{pmatrix} 2\hat{u}_{\beta 1} + \hat{u}_{\beta 2} \\ \hat{u}_{\beta 2} + 2\hat{u}_{\beta 1} \end{pmatrix}.$$
(3.86)

Локальный вектор \hat{G}^{S_2} ребра Γ длины *h* с заданным на нем краевым условием второго рода при представлении параметра θ на Γ в виде $\hat{\theta}_1 \hat{\psi}_1 + \hat{\theta}_2 \hat{\psi}_2$ вычисляется аналогично \hat{G}^{S_3} и имеет вид

$$\hat{G}^{S_2} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_2 + 2\hat{\theta}_1 \end{pmatrix}.$$
(3.87)

Процедуры сборки глобальной матрицы и вектора конечноэлементной СЛАУ из локальных матриц и векторов конечных элементов и ребер с заданными на них краевыми условиями третьего и второго рода полностью аналогичны описанным в предыдущей главе процедурам сборки конечнообъемной СЛАУ.

Кроме билинейных базисных функций на прямоугольных конечных элементах довольно часто используются биквадратичные и бикубические базисные функции. Биквадратичные базисные функции строятся в виде произведений одномерных квадратичных базисных функций координат x и y. Так если $X_1(x)$ – квадратичная функция, равная единице при $x=x_{2i-1}$ и нулю при $x=x_{2i}$ и $x=x_{2i+1}$, $X_2(x)$ – квадратичная функция, равная единице при $x=x_{2i}$ и нулю при

 $x = x_{2i-1}$ и $x = x_{2i+1}$, $X_3(x)$ – квадратичная функция, равная единице при $x=x_{2i+1}$ и нулю при $x = x_{2i}$ и $x = x_{2i-1}$, а $Y_1(y)$ – квадра- y_{2j+1} тичная функция, равная единице при $y=y_{2i-1}$ и нулю при $y=y_{2i}$ и $y=y_{2i+1}, Y_2(y)$ – квадратичная функция, равная единице при $y=y_{2i}$ и нулю при $y=y_{2i-1}$ и $y=y_{2i+1}$, *Y*₃(*y*) – квадратичная функция, равная единице при $y=y_{2i+1}$ и нулю при $y=y_{2i}$ и $y=y_{2i-1}$, то локальные базисные функции $\hat{\Psi}_{y}(x,y)$ элементе на конечном $\Omega_{ii} = (x_{2i-1}, x_{2i+1}) \times (y_{2i-1}, y_{2i+1})$ с показанной на рис. 25 локальной нумерацией его узлов имеют следующий вид:



Рис. 25. Расположение узлов на прямоугольном конечном элементе с биквадратичными базисными функциями

$\hat{\Psi}_1(x,y) = X_1(x)Y_1(y),$	$\hat{\Psi}_2(x,y) = X_2(x)Y_1(y),$	$\hat{\psi}_3(x,y) = X_3(x)Y_1(y),$
$\hat{\Psi}_4(x,y) = X_1(x)Y_2(y),$	$\hat{\Psi}_5(x,y) = X_2(x)Y_2(y),$	$\hat{\Psi}_6(x,y) = X_3(x)Y_2(y),$
$\hat{\Psi}_7(x,y) = X_1(x)Y_3(y),$	$\hat{\Psi}_8(x,y) = X_2(x)Y_3(y),$	$\hat{\psi}_9(x,y) = X_3(x)Y_3(y).$

Не представляет никакого труда получить выражения для компонент локальных матриц жесткости и массы и вектора правой части прямоугольного конечного элемента с биквадратичными базисными функциями. Для этого достаточно воспользоваться выражениями для компонент локальных матриц жесткости и массы и вектора правой части одномерных конечных элементов с квадратичными базисными функциями (см. соотношения (3.70)-(3.71)).

Аналогично могут быть построены бикубические базисные функции на прямоугольном лагранжевом конечном элементе (этот элемент будет иметь $4 \times 4 = 16$ узлов).

Значительный интерес при решении некоторых практических задач могут представлять бикубические базисные функции на прямоугольных эрмитовых конечных элементах. Эти функции также строятся в виде произведения кубических функций одномерных эрмитовых элементов (см. рис. 23 и соотношения (3.74)-(3.79)). Полученные в результате сшивки таких локальных бикубических функций (определенных на эрмитовых прямоугольных конечных элементах) глобальные кусочно-бикубические базисные функции порождают конечномерное пространство V^h функций v^h , имеющих не только непрерывные первые производные $\frac{\partial v^h}{\partial x}$ и $\frac{\partial v^h}{\partial y}$, но и непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 v^h}{\partial x \partial y}$.

Использование таких конечных элементов дает особенно большие преимущества в том случае, когда в качестве результата решения краевой задачи необходимо получить значения производных решения в заданных точках расчетной области. Кроме того, такие элементы могут быть использованы и для решения краевых задач для дифференциальных уравнений четвертого порядка (т.е. при решении некоторых задач теории упругости).

3.5. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Рассмотрим конечноэлементную аппроксимацию двумерной эллиптической краевой задачи на треугольной сетке. Как и в п.2.3 предыдущей главы будем считать, что треугольная сетка задана в виде набора узлов и набора треугольников. Каждый узел сетки описывается двумя координатами x_k и y_k , а каждый треугольник Ω_m – четырьмя числами, первые три из которых – номера узлов сетки, являющихся вершинами рассматриваемого треугольника, а четвертый – номер подобласти расчетной области, служащий для определения значений параметров p, γ и f дифференциального уравнения (1.1) внутри данного треугольника. Границы S_2 и S_3 представлены наборами ребер, каждое из которых описывается тремя целыми числами, причем первые два числа – это номера узлов сетки, являющиеся вершинами рассматриваемого ребра, а третье число служит для определения значений параметров заданного на ребре краевого условия второго или третьего рода. Граница же S_1 представлена набором пар целых чисел, в котором первое число каждой пары является номером узла, лежащим на S_1 , а второе служит для определения значения параметра u_g этого краевого условия (хотя для эрмитовых конечных элементов может оказаться более удобным представление границы S_1 в виде набора ребер).

На каждом элементе Ω_m треугольной сетки определим три локальных базисных функции

$$\hat{\Psi}_i(x,y) = \alpha_0^i + \alpha_1^i x + \alpha_2^i y, \quad i = 1,2,3 ,$$
(3.88)

такие, что $\hat{\psi}_1$ равна единице в первой (с координатами $\{\hat{x}_1, \hat{y}_1\}$) вершине Ω_m и нулю в двух других, $\hat{\psi}_2$ равна единице во второй (с координатами $\{\hat{x}_2, \hat{y}_2\}$) вершине Ω_m и нулю в двух остальных, а $\hat{\psi}_3$ равна единице в третьей (с координатами $\{\hat{x}_3, \hat{y}_3\}$) вершине Ω_m и нулю в двух остальных. Очевидно, что определенные таким образом локальные базисные функции $\hat{\psi}_i$ на треугольнике Ω_m фактически являются *L*-координатами этого треугольника (см. п.2.3), т.е. $\hat{\psi}_i(x,y) \equiv L_i(x,y)$, и поэтому коэффициенты α_v^i функций $\hat{\psi}_i$ могут быть вычислены по формулам (2.87), (2.89), (2.90), а при вычислении интегралов от произведений вида $\hat{\psi}_i \hat{\psi}_j$ по треугольнику Ω_m или любому его ребру Γ можно использовать соотношения (2.91).

Получим выражения для локальных матриц жесткости \hat{B} и массы \hat{C} конечного элемента Ω_m . Учитывая представление (3.88) функций $\hat{\psi}_i$ на Ω_m и заменяя параметр *p* его осредненным по Ω_m значением \overline{p} , получим

$$\hat{b}_{ij} = \int_{\Omega_m} \overline{p} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial y} \right) d\Omega = \overline{p} \int_{\Omega_m} (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j) d\Omega = \overline{p} \left(\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j \right) mes \Omega_m.$$

Учитывая соотношение (2.88), получим

$$\hat{b}_{ij} = \overline{p} \, \frac{|\det D|}{2} \left(\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3 , \qquad (3.89)$$

где матрица D определяется соотношением (2.85), а ее определитель – соотношением (2.89).

Столь же просто вычисляются компоненты локальной матрицы \hat{C} . Будем считать, что параметр γ также заменяется на Ω_m своим осредненным значением $\overline{\gamma}$. Тогда, используя первое из соотношений (2.91), получим

$$\hat{c}_{ii} = \int_{\Omega_m} \overline{\gamma}(\hat{\psi}_i)^2 d\Omega = \overline{\gamma} \int_{\Omega_m} (L_i)^2 d\Omega = \overline{\gamma} \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} 2mes\Omega_m = \frac{\overline{\gamma}|\det D|}{12}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\hat{c}_{ij} = \int_{\Omega_m} \overline{\gamma} \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j d\Omega = \overline{\gamma} \int_{\Omega_m} L_i L_j d\Omega = \overline{\gamma} \frac{1!!!0!}{(1+1+0+2)!} 2mes\Omega_m = \frac{\overline{\gamma} |\det D|}{24}, \quad i \neq j ,$$

т.е.

$$\hat{C} = \frac{\overline{\gamma} |\det D|}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
(3.90)

Получим выражения, определяющие локальную матрицу и вектор ребра Γ_m , на котором задано краевое условие третьего рода. Будем считать, что параметр β на Γ_m постоянен, а параметр u_β представлен в виде линейного интерполянта $\hat{u}_{\beta 1}\hat{\psi}_1 + \hat{u}_{\beta 2}\hat{\psi}_2$ (где $\hat{u}_{\beta 1}$ и $\hat{u}_{\beta 2}$ – значения параметра u_β в вершинах ребра Γ_m). Тогда компоненты локальной матрицы \hat{A}^{S_3} и вектора \hat{G}^{S_3} ребра Γ_m определяются соотношениями

$$\hat{c}_{ij} = \beta \int_{\Gamma_m} \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j d\Gamma , \qquad \qquad \hat{f}_i = \beta \int_{\Gamma_m} (\hat{u}_{\beta 1} \hat{\psi}_1 + \hat{u}_{\beta 2} \hat{\psi}_2) \hat{\psi}_i d\Gamma . \qquad (3.91)$$

Используя второе из соотношений (2.91) для вычисления интегралов в выражениях (3.91) (напомним, что локальные базисные функции являются в рассматриваемом случае *L*-координатами), получим

$$\hat{A}^{S_3} = \frac{\beta h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \qquad \hat{G}^{S_3} = \frac{\beta h}{6} \begin{pmatrix} 2\hat{u}_{\beta 1} + \hat{u}_{\beta 2}\\ \hat{u}_{\beta 1} + 2\hat{u}_{\beta 2} \end{pmatrix}, \qquad (3.92)$$

где $h=mes\Gamma_m$ – длина ребра Γ_m .

Аналогично вычисляется локальный вектор ребра Γ_m с заданным на нем краевым условием второго рода (при условии, что параметр θ заменяется на Γ_m своим интерполянтом $\hat{\theta}_1 \hat{\psi}_1 + \hat{\theta}_2 \hat{\psi}_2$, где $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ – значения параметра θ в вершинах ребра Γ_m):

$$\hat{G}^{S_2} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_1 + 2\hat{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$
(3.93)

Очевидно, что вклады от краевых условий второго и третьего рода в конечноэлементной и конечнообъемной аппроксимациях также несколько различаются – сравните соотношения (2.142)–(2.143) с соотношениями (3.85)–(3.87) и (3.92)–(3.93) (совпасть могут лишь локальные векторы при условии u_{β} =const на Γ_m или θ =const на Γ_m).

Кроме линейных базисных функций на треугольных конечных элементах довольно часто используются квадратичные и кубические базисные функции. В этом случае узлами конечноэлементной сетки, в которых определяются значения базисных функций, являются не только вершины треугольников, но и точки на их ребрах и внутри треугольников. Например, для определения шести коэффициентов полного квадратичного полинома необходимо задать его значения в шести узлах, и поэтому на треугольнике Ω_m кроме трех его вершин узлами являются также середины трех его сторон. Для определения десяти коэффициентов полного кубического полинома необходимо задать его значения в десяти узлах, и поэтому на треугольнике Ω_m кроме трех вершин треугольника должно быть еще 7 узлов; как правило, эти дополнительные узлы ставятся по два на каждом ребре треугольника и один в его центре масс. Возможно и использование эрмитовой интерполяции решения на треугольных конечных элементах (так называемых эрмитовых треугольных элементов). В этом случае в вершинах треугольников определяются не только значения базисных функций, но и значения их производных. Но в любом случае, при использовании как лагранжевых, так и эрмитовых треугольных конечных элементов, локальные базисные функции на треугольниках наиболее удобно представлять в виде полиномов *L*-координат /9/. Так, например, квадратичные базисные функции на треугольнике через *L*-координаты выражаются следующим образом /9/:

$$\hat{\psi}_1(x,y) = L_1(2L_1 - 1), \qquad \hat{\psi}_2(x,y) = L_2(2L_2 - 1), \qquad \hat{\psi}_3(x,y) = L_3(2L_3 - 1), \\ \hat{\psi}_4(x,y) = 4L_1L_2, \qquad \hat{\psi}_5(x,y) = 4L_2L_3, \qquad \hat{\psi}_6(x,y) = 4L_1L_3.$$

(здесь первые три базисные функции соответствуют узлам в вершинам треугольника, а последние три – узлам в серединах его сторон). Аналогичные выражения имеются и для других типов базисных функций на треугольниках /9/. Но, в принципе, можно использовать и обычное представление базисных функций высоких порядков в виде полиномов пространственных координат. Коэффициенты каждого из этих полиномов можно вычислить по значениями базисной функции (и по значениями ее производной для эрмитовых конечных элементов) в узлах треугольника, а при вычислении интегралов от базисных функций и их производных по треугольнику Ω_m можно воспользоваться соотношением (2.82), позволяющим заменить переменные x и y на линейные комбинации L-координат.

В заключение сделаем очень важное замечание, касающееся тех погрешностей МКЭ, которые появляются из-за несовпадения объединения всех конечных элементов Ω_k с исходной областью Ω . Действительно, если Ω имеет криволинейную границу, то невозможно разбить Ω на прямоугольные или треугольные конечные элементы Ω_k так, чтобы их объединение $\bigcup_k \Omega_k$ точно давало Ω . В этом случае будем обозначать объединение всех конечных элементов Ω^h $\left(\Omega^h = \bigcup_k \Omega_k\right)$, а границы области Ω^h , на которых вместо соответствующих криволинейных границ S_2 и S_3 заданы краевые условия второго и третьего рода,

будем обозначать соответственно через S_2^h и S_3^h . Тогда метод конечных элементов дает решение u^h , доставляющее на множестве пробных функций $v^h \in V^h$ минимум не исходному функционалу (3.21), а функционалу

$$I^{h}(v^{h}) = \int_{\Omega^{h}} \left[p \left(g rad v^{h} \right)^{2} + \gamma \left(v^{h} \right)^{2} \right] d\Omega + \int_{S_{3}^{h}} \beta \left(v^{h} \right)^{2} dS - 2 \int_{\Omega^{h}} f v^{h} d\Omega - 2 \int_{S_{3}^{h}} \beta u_{\beta} v^{h} dS - 2 \int_{S_{2}^{h}} \Theta v^{h} dS,$$

$$(3.94)$$

т.е. интегрирование в этом функционале производится не по области Ω , а по многоугольнику Ω^h , являющемуся объединением всех конечных элементов $\left(\Omega^{h} = \bigcup_{k} \Omega_{k}\right)$, и не по криволинейным границам S_{3} и S_{2} , а по сторонам конечных элементов (или, что то же самое, по сторонам многоугольника Ω^h) S_2^h и S_3^h , аппроксимирующим криволинейные границы исходной области Ω . Минимизация *I^h* должна проводится на функциях, удовлетворяющих главному краевому условию на границе S₁, и поэтому если граница S₁ криволинейная, то главное краевое условие u_g фактически переносится на границу S_1^h , являющуюся объединением аппроксимирующих S_1 сторон треугольников Ω_k . Очевидно, что при измельчении шага сетки (т.е. при разбиении Ω на все более мелкие конечные элементы Ω_k) область Ω и ее криволинейные границы будут все лучше аппроксимироваться многоугольником $\left(\Omega^{h} = \bigcup_{k} \Omega_{k}\right)$ и его границами. Изучение погрешности этой аппроксимации является задачей численного анализа /14/. Если обозначить h – средний размер конечного элемента, $H^1_{E,h}$ – множество функций пространства H^1 , заданных на Ω^h (а не на Ω) и удовлетворяющих главному краевому условию на S_1^h , $w^h - функцию, доставляющую ми$ нимум функционалу (3.94) на множестве функций $H^1_{E,h}$ (т.е. функция w^h отличается от функции u^h тем, что u^h доставляет минимум функционалу (3.94) на подпространстве $V^h_{\varepsilon} \subset H^1_{E,h}$, а w^h минимизирует тот же функционал I^h на всем пространстве $H^1_{E,h}$; однако $w^h \neq u$, так как $I^h \neq I$), то численный анализ дает следующие результаты /14/ для треугольных конечных элементов с линейными базисными функциями:

$$\begin{aligned} \left\| u - w^{h} \right\|_{0} &= o(h^{2}) \\ \left\| u - w^{h} \right\|_{1} &= o(h^{\frac{3}{2}}) \\ \left\| u - w^{h} \right\|_{3} &= o(h^{\frac{3}{2}}) \end{aligned} ,$$

$$(3.95)$$
а для прямоугольных конечных элементов с билинейными базисными функциями

$$\begin{aligned} \left\| u - w^{h} \right\|_{0} &= o(h) \\ \left\| u - w^{h} \right\|_{1} &= o\left(h^{\frac{1}{2}} \right) \\ \left\| u - w^{h} \right\|_{2} &= o\left(h^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$
(3.96)

Здесь $\|v\|_0$, $\|v\|_1$ и $\|v\|_3$ – нулевая, первая и энергетическая нормы функции v, определяемые соотношениями (3.48), (3.49) и (3.44)-(3.45).

Из соотношений (3.95) и (3.96) видно, насколько плоха аппроксимация точного решения u при замене области Ω многоугольником Ω^h , состоящим из <u>прямоугольников</u> у криволинейной части границы S области Ω , по сравнению с аппроксимацией u при замене области Ω многоугольником Ω^h , состоящим из <u>треугольников</u> у криволинейной части границы S области Ω . Поэтому при наличии в расчетной области криволинейных границ треугольные конечные элементы имеют явные преимущества по точности перед прямоугольными.

4. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МКО И МКЭ

В данной главе мы рассмотрим некоторые способы аппроксимации начально-краевых задач для уравнений параболического типа

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f \tag{4.1}$$

и для уравнений гиперболического типа

$$\chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f.$$
(4.2)

При построении дискретных аналогов начально-краевых задач для дифференциальных уравнений (4.1) и (4.2) будем полагать, что ось времени t разбита на так называемые временные слои значениями t_j , j=0,...,J, а значения искомой функции u и параметров p, σ , χ и f дифференциальных уравнений (4.1) и (4.2) на j-м временном слое (т.е. при $t=t_j$) будем обозначать соответственно через u^j , p^j , σ^j , χ^j и f^j , которые уже не зависят от времени t, но остаются функциями пространственных координат (в двумерном случае $u^j = u^j(x,y) = u(x,y,t_j)$, $p^j = p^j(x,y) = p(x,y,t_j)$ и т.д.).

Помимо краевых условий вида (1.2)–(1.4) начально-краевая задача для уравнения (4.1) должна включать в себя начальное условие

$$u\big|_{t=t_0} = u^0, \tag{4.3}$$

где u^0 – заданная функция пространственных координат ($u^0 = u^0(x, y)$ в двумерном случае), а начально-краевая задача для уравнения (4.2) должна включать в себя два начальных условия, в которых задаются значение искомой функции *u* в начальный момент времени t_0 (в виде соотношения (4.3)) и значение производной *u* по времени в тот же момент $t=t_0$. Очевидно, что из этих двух начальных условий легко получить приближенное значение на временном слое

 t_1 : $u^1 \approx u^0 + \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} (t-t_0)$. Поэтому в начально-краевой задаче для уравнения

(4.2) мы будем использовать два начальных условия в виде (4.3) и в виде

$$u\Big|_{t=t_1} = u^1,$$
 (4.4)

причем функция u^1 из (4.4) может быть либо задана непосредственно, либо пересчитана по значениями u^0 и $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$ указанным выше способом. Будем также

считать, что функции u^0 и u^1 из начальных условий (4.3) и (4.4) заданы своими значениями в узлах пространственной сетки.

Для описания вычислительных процедур построения конечнообъемных и конечноэлементных решений начально-краевых задач для уравнений (4.1) и (4.2) удобно ввести две матрицы, получающиеся в результате соответствующей аппроксимации отдельных членов дифференциального уравнения эллиптического типа: матрицу *B* как аппроксимацию члена $-div(p \cdot gradu)$ (которую часто называют матрицей жесткости) и матрицу *C* как аппроксимацию члена γu (которую называют матрицей массы), т.е.

$$-div(p \cdot grad u) \xrightarrow{\text{аппроксимация по МКО или МКЭ}} B \cdot U, \qquad (4.5)$$

$$\gamma u \xrightarrow{\text{аппроксимация по МКО или МКЭ}} C \cdot U, \qquad (4.6)$$

где U – значения искомой функции u в узлах пространственной сетки (ранее мы обозначали этот вектор через Q). Аналогично через G будем обозначать вектор правой части конечнообъемной или конечноэлементной СЛАУ, получающейся в результате соответствующей аппроксимации краевой задачи для уравнения эллиптического типа (1.1).

4.1. АППРОКСИМАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим аппроксимацию дифференциального уравнения (4.1) по времени с использованием следующих схем:

$$\sigma \frac{u^{j} - u^{j-1}}{\Delta t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u^{j}) = f^{j}, \qquad j = 1, \dots, J, \qquad (4.7)$$

$$\sigma \frac{u^{j} - u^{j-1}}{\Delta t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u^{j-1}) = f^{j-1}, \qquad j = 1, \dots, J, \qquad (4.8)$$

$$\sigma \frac{u^{j} - u^{j-1}}{\Delta t} - \operatorname{div}\left(p \operatorname{grad}\frac{u^{j} + u^{j-1}}{2}\right) = \frac{f^{j} + f^{j-1}}{2}, \qquad j = 1, \dots, J \quad , \tag{4.9}$$

где $\Delta t = t^j - t^{j-1}$ (здесь и далее мы будем считать, что параметры дифференциального уравнения (4.1) не зависят от времени, а правая часть f – зависит; не представляет труда записать схемы, аналогичные (4.7)–(4.9) и в случае зависимости параметров σ и p от t). Аппроксимация (4.7) называется аппроксимацией по неявной схеме, аппроксимация (4.8) – аппроксимацией по явной схеме, а аппроксимация (4.9) – аппроксимацией по схеме Кранка-Николсона.

Чтобы построить вычислительные процедуры численного решения полученных уравнений, воспользуемся введенными ранее матрицами жесткости B и массы C (см. (4.5), (4.6)), причем в соотношении (4.6) под γ будем понимать параметр σ . Обозначим через U^{j} значения функции u^{j} в узлах пространственной (конечнообъемной или конечноэлементной) сетки. Тогда в результате конечнообъемной или конечноэлементной аппроксимации краевой задачи для дифференциального уравнения (4.7) (с краевыми условиями вида (1.2)–(1.4), наложенными на функцию u^{j}), для каждого j=1, ..., J мы получим матричное уравнение следующего вида:

$$\frac{1}{\Delta t}CU^{j} - \frac{1}{\Delta t}CU^{j-1} + BU^{j} = G^{j}.$$
(4.10)

Если считать вектор U^{j-1} известным, то матричное уравнение (4.10) фактически является СЛАУ для вектора неизвестных U^{j}

$$\left(\frac{1}{\Delta t}C+B\right)U^{j} = G^{j} + \frac{1}{\Delta t}CU^{j-1},$$
(4.11)

т.е. фактически матрицей A в СЛАУ (4.11) является сумма матриц $\frac{1}{\Delta t}C + B$, а

вектором правой части – вектор $G^{j} + \frac{1}{\Delta t} C U^{j-1}$. Учитывая, что вектор U^{0} опре-

деляется значением функции u^0 из начального условия (4.3) в узлах пространственной сетки, получаем следующую вычислительную процедуру. С использованием МКО или МКЭ строятся матрицы *B* и *C* и вектор G^1 . Из матриц *B* и *C* формируется матрица $A = \frac{1}{\Delta t}C + B$. Затем формируется вектор $F = G^1 + \frac{1}{\Delta t}CU^0$ и из решения СЛАУ $AU^1 = F$ находится вектор решения U^1 на первом временном слое. Далее из матриц *C* и *B* формируется новая матрица *A* (только в том случае, если изменился шаг по времени Δt ; если же Δt не изменился, то матри-

ца *А* также не меняется и переформировывать ее не нужно), формируется вектор $F = G^2 + \frac{1}{\Delta t}CU^1$ и из решения СЛАУ $AU^2 = F$ находится вектор решения U^2 на втором временном слое. Продолжая этот процесс, получим решение на-

чально-краевой задачи на всех интересующих нас временных слоях t_j (j=1, ..., J).

Аналогично строятся процедуры решения уравнений (4.8) и (4.9). Для уравнения (4.8) получаем матричное уравнение

$$\frac{1}{\Delta t}CU^{j} = G^{j-1} + \left(\frac{1}{\Delta t}C - B\right)U^{j-1},$$
(4.12)

а для уравнения (4.9) – матричное уравнение

$$\left(\frac{1}{\Delta t}C + \frac{1}{2}B\right)U^{j} = \frac{1}{2}\left(G^{j} + G^{j-1}\right) + \left(\frac{1}{\Delta t}C - \frac{1}{2}B\right)U^{j-1}.$$
(4.13)

Очевидно, если в результате аппроксимации по пространству матрица C будет иметь ненулевые элементы только на главной диагонали (чего нетрудно добиться при использовании подходящей аппроксимации в МКО и возможно получить при использовании специальных подходов к построению МКЭаппроксимации), то компоненты вектора решения U^{j} уравнения (4.12) явным образом выражаются через компоненты вектора решения U^{j} на предыдущем временном слое (в связи с чем схема (4.8) и была названа явной). Отметим, однако, что для устойчивости вычислительного процесса при использовании явной схемы необходимо соблюдать определенное соотношение между шагом по времени и размерами ячейки дискретизации в пространственной сетке: с уменьшением размеров ячейки дискретизации максимально допустимый для устойчивого счета шаг по времени должен быть уменьшен пропорционально квадрату размера ячеек дискретизации. Такого рода ограничений нет в неявной схеме (4.11) и в схеме Кранка-Николсона (4.13) (которая по своей сути также

является неявной схемой), и поэтому несмотря на то, что при их использовании на каждом временном слое необходимо решать соответствующую СЛАУ, в суммарном итоге эти схемы чаще всего оказываются более экономичными по времени счета, чем явная схема (из-за гораздо большего числа временных слов в явной схеме, необходимого для обеспечения ее устойчивости). По сравнению с неявной схемой схема Кранка-Николсона обладает более быстрой сходимостью при измельчении шага по времени, но она может давать нефизичные осцилляции решения по времени t при определенных соотношениях между размером шага по времени и размерами ячеек дискретизации в пространственной сетке, в то время как неявная схема (4.11) дает, как правило, почти монотонную сходимость как при уменьшении шага по времени, так и при уменьшении размера ячеек дискретизации. В связи с этим значительный интерес представляют схемы, обладающие достоинствами неявной схемы и схемы Кранка-Николсона, т.е. схемы с высокой скоростью сходимости при измельчении шага по времени и по пространству (как схема Кранка-Николсона) и в то же время практически не имеющие осцилляций численного решения по времени (как и у неявной схемы (4.11)). Такими достоинствами обладают неявные многослойные схемы.

Рассмотрим процедуру построения неявной трехслойной схемы для решения дифференциального уравнения параболического типа. Представим искомое решение u на интервале (t_{j-2} , t_j) в следующем виде (будем считать, что функция u является функцией двух пространственных координат x и y, хотя это совершенно не принципиально, так как все дальнейшие рассуждения останутся справедливыми и для одномерных, и для трехмерных начально-краевых задач):

$$u(x,y,t) \approx u^{j-2}(x,y)\eta_2^j(t) + u^{j-1}(x,y)\eta_1^j(t) + u^j(x,y)\eta_0^j(t), \qquad (4.14)$$

где функции пространственных координат u^{j-2} , u^{j-1} и u^j являются значениями искомой функции u при $t=t_{j-2}$, $t=t_{j-1}$ и $t=t_j$ соответственно, а функции $\eta_v^j(t)$ являются квадратичными функциями времени, причем $\eta_2^j(t)$ равна единице при $t=t_{j-2}$ и нулю при $t=t_{j-1}$ и $t=t_j$, функция $\eta_1^j(t)$ равна единице при $t=t_{j-1}$ и нулю при $t=t_{j-1}$ и $t=t_j$, а функция $\eta_0^j(t)$ равна единице при $t=t_j$ и нулю при $t=t_{j-2}$ и $t=t_{j-2}$ и $t=t_j$. Очевидно, что в представлении (4.14) функция u по времени фактически является квадратичными интерполянтом своих значений на временных слоях $t=t_{j-2}$, $t=t_{j-1}$ и $t=t_j$.

Построим функции $\eta_2^i(t)$, $\eta_1^i(t)$ и $\eta_0^i(t)$. Поскольку $\eta_2^i(t)$ является квадратичным полиномом переменной t, имеющем корни $t=t_{j-1}$ и $t=t_j$, то она может быть представлена в виде

$$\eta_2^{i}(t) = \alpha (t - t_{j-1}) (t - t_j) .$$
(4.15)

Значения коэффициента α в (4.15) может быть легко найдено из условия $\eta_2^i(t_{j-2})=1$:

$$\alpha (t_{j-2} - t_{j-1}) (t_{j-2} - t_j) = 1.$$
(4.16)

Если ввести обозначения

$$\Delta t = t_j - t_{j-2}, \qquad \Delta t_1 = t_{j-1} - t_{j-2}, \qquad \Delta t_0 = t_j - t_{j-1}, \tag{4.17}$$

то из (4.16) получаем значение коэффициента α в виде $\alpha = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t}$, и соотношение (4.15), определяющее функцию $\eta_2^i(t)$, примет следующий вид:

$$\eta_2^{j}(t) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t} (t - t_{j-1}) (t - t_j) .$$
(4.18)

Аналогично могут быть получены соотношения, определяющие функции $\eta_1^i(t)$ и $\eta_0^i(t)$:

$$\eta_1^j(t) = -\frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_0} (t - t_{j-2}) (t - t_j) , \qquad (4.19)$$

$$\eta_0^j(t) = \frac{1}{\Delta t \Delta t_0} \left(t - t_{j-2} \right) \left(t - t_{j-1} \right) \,. \tag{4.20}$$

Применим представление (4.14) для аппроксимации производной по времени параболического уравнения (4.1) на временном слое $t=t_i$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u^{j-2}(x,y) \eta_2^j(t) + u^{j-1}(x,y) \eta_1^j(t) + u^j(x,y) \eta_0^j(t) \right) \bigg|_{t=t_j} - div \left(p \operatorname{grad} u^j \right) = f^j \quad .$$

$$(4.21)$$

Вычислим производные по t функций (4.18)–(4.20) при $t=t_j$ (с учетом обозначений (4.17))

$$\frac{d\eta_{2}^{j}(t)}{dt}\Big|_{t=t_{j}} = \frac{1}{\Delta t_{1}\Delta t} \left[\left(t - t_{j}\right) + \left(t - t_{j-1}\right) \right] \Big|_{t=t_{j}} = \frac{t_{j} - t_{j-1}}{\Delta t_{1}\Delta t} = \frac{\Delta t_{0}}{\Delta t_{1}\Delta t} , \\
\frac{d\eta_{1}^{j}(t)}{dt}\Big|_{t=t_{j}} = -\frac{1}{\Delta t_{1}\Delta t_{0}} \left[\left(t - t_{j}\right) + \left(t - t_{j-2}\right) \right] \Big|_{t=t_{j}} = -\frac{t_{j} - t_{j-2}}{\Delta t_{1}\Delta t_{0}} = -\frac{\Delta t}{\Delta t_{1}\Delta t_{0}} , \quad (4.22)$$

$$\frac{d\eta_{0}^{j}(t)}{dt}\Big|_{t=t_{j}} = \frac{1}{\Delta t\Delta t_{0}} \left[\left(t - t_{j-1}\right) + \left(t - t_{j-2}\right) \right] \Big|_{t=t_{j}} = \frac{\left(t_{j} - t_{j-1}\right) + \left(t_{j} - t_{j-2}\right)}{\Delta t\Delta t_{0}} = \frac{\Delta t + \Delta t_{0}}{\Delta t\Delta t_{0}} .$$

С учетом (4.22) уравнение (4.21) может быть переписано в виде

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} u^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1} + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} u^j - div \left(p \, grad \, u^j \right) = f^j.$$
(4.23)

Выполняя конечнообъемную или конечноэлементную аппроксимацию краевой задачи для уравнения (4.23), получим СЛАУ следующего вида:

$$\left(\frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}C + B\right)U^j = G^j - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1}CU^{j-2} + \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}CU^{j-1},$$
(4.24)

где, как и раньше, C – матрица массы, B – матрица жесткости, U^{j-2} и U^{j-1} – решение на двух предыдущих слоях по времени, U^{j-1} – искомое решение на текущем слое по времени.

Очевидно, что воспользоваться схемой (4.24) для нахождения функции u на j-м временном слое мы можем лишь в том случае, когда нам известны значения u на двух предыдущих временных слоях, т.е. по схеме (4.24) мы можем вычислять U^2 , U^3 , U^4 и т.д. Для вычисления же U^1 (U^0 нам известно из начального условия) можно воспользоваться, например, неявной двухслойной схемой (4.11).

Рассмотренный метод построения трехслойной схемы очень удобен и при аппроксимации начально-краевых задач по явной схеме при использовании неравномерного по времени шага (это будет показано ниже для уравнения гиперболического типа), но для уравнений параболического типа неявная трехслойная схема (4.24), как правило, значительно эффективной любой явной схемы.

Аналогично может быть построена и четырехслойная схема. В ней функция *и* представляется в виде

$$u(x,y,t) \approx u^{j-3}(x,y)\eta_3^j(t) + u^{j-2}(x,y)\eta_2^j(t) + u^{j-1}(x,y)\eta_1^j(t) + u^j(x,y)\eta_0^j(t) , \quad (4.25)$$

где функции $\eta_v^j(t)$ являются кубическими полиномами и имеют следующий вид (фактически это интерполяционные полиномы Лагранжа):

$$\eta_{3}^{i}(t) = \frac{1}{(t_{j-3} - t_{j-2})(t_{j-3} - t_{j-1})(t_{j-3} - t_{j})}(t - t_{j-2})(t - t_{j-1})(t - t_{j}),$$

$$\eta_{2}^{i}(t) = \frac{1}{(t_{j-2} - t_{j-3})(t_{j-2} - t_{j-1})(t_{j-2} - t_{j})}(t - t_{j-3})(t - t_{j-1})(t - t_{j}),$$

$$\eta_{1}^{i}(t) = \frac{1}{(t_{j-1} - t_{j-3})(t_{j-1} - t_{j-2})(t_{j-1} - t_{j})}(t - t_{j-3})(t - t_{j-2})(t - t_{j}),$$

$$\eta_{0}^{i}(t) = \frac{1}{(t_{j} - t_{j-3})(t_{j} - t_{j-2})(t_{j} - t_{j-1})}(t - t_{j-3})(t - t_{j-2})(t - t_{j-1}).$$
(4.26)

4.2. АППРОКСИМАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

При решении начально-краевых задач для уравнения гиперболического типа (4.2) наиболее часто используют две схемы аппроксимации этого уравнения: явную схему и схему, аналогичную схеме Кранка-Николсона /7/. При условии, что шаг по времени $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ не изменяется на всех временных слоях, явная схема аппроксимации уравнения (4.2) по времени имеет вид

$$\chi \frac{u^{j} - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^{2}} + \sigma \frac{u^{j} - u^{j-2}}{2\Delta t} - div \left(p \, grad \, u^{j-1} \right) = f^{j-1}, \tag{4.27}$$

а схема, аналогичная схеме Кранка-Николсона, следующий вид:

$$\chi \frac{u^{j} - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^{2}} + \sigma \frac{u^{j} - u^{j-2}}{2\Delta t} - div \left(p \, grad \frac{u^{j} + u^{j-2}}{2} \right) = \frac{f^{j} + f^{j-2}}{2}, \quad (4.28)$$

где u^{j} является значением искомой функции u на временном слое $t = t_{j}$, причем значения u^{j} и u^{j} должны быть заданы в качестве начальных условий.

Выполняя конечнообъемную или конечноэлементную аппроксимацию соответствующих задач для уравнений (4.27) и (4.28), получим матричные уравнения следующего вида:

$$\frac{1}{\Delta t^{2}}C_{\chi}U^{j} - \frac{2}{\Delta t^{2}}C_{\chi}U^{j-1} + \frac{1}{\Delta t^{2}}C_{\chi}U^{j-2} + \frac{1}{2\Delta t}C_{\sigma}U^{j} - \frac{1}{2\Delta t}C_{\sigma}U^{j-2} + BU^{j-1} = G^{j-1},$$
(4.29)

$$\frac{1}{\Delta t^{2}}C_{\chi}U^{j} - \frac{2}{\Delta t^{2}}C_{\chi}U^{j-1} + \frac{1}{\Delta t^{2}}C_{\chi}U^{j-2} + \frac{1}{2\Delta t}C_{\sigma}U^{j} - \frac{1}{2\Delta t}C_{\sigma}U^{j-2} + \frac{1}{2}BU^{j} + \frac{1}{2}BU^{j-2} = \frac{1}{2}G^{j} + \frac{1}{2}G^{j-2},$$
(4.30)

где *B*, как и в предыдущем пункте, – матрица жесткости, получающаяся в результате аппроксимации члена -div(p grad u), а C_{χ} и C_{σ} – матрицы массы, получающиеся в результате аппроксимации членов χu и σu соответственно.

Вычислительные процессы решения полученных уравнений строятся так же, как и для рассмотренных в предыдущем пункте уравнений (4.7)-(4.9). Матричное уравнение (4.29), аппроксимирующее краевую задачу для уравнения (4.27), фактически является системой линейных алгебраических уравнений для

вектора U^{j} с матрицей $A = \frac{1}{\Delta t^{2}}C_{\chi} + \frac{1}{2\Delta t}C_{\sigma}$ и вектором правой части $F = G^{j-1} + \frac{2}{\Delta t^{2}}C_{\chi}U^{j-1} - \frac{1}{\Delta t^{2}}C_{\chi}U^{j-2} + \frac{1}{2\Delta t}C_{\sigma}U^{j-2} - BU^{j-1}$. Очевидно, что при

построении конечнообъемной аппроксимации уравнения (4.27) (с соответствующими краевыми условиями) можно использовать такую схему, что матрицы массы C_{χ} и C_{σ} будут иметь ненулевые компоненты только на главной диагона-

ли (см. главу 2). В этом случае и у матрицы
$$A = \frac{1}{\Delta t^2} C_{\chi} + \frac{1}{2\Delta t} C_{\sigma}$$
СЛАУ $AU^j = F$

ненулевые компоненты будут только на главной диагонали, и в результате решение на каждом временном слое вычисляется фактически без решения СЛАУ. Преимущества такой аппроксимации очевидны: из вычислительной процедуры, реализующей построение численного решения на каждом временном слое, устраняется один из наиболее трудоемких этапов – этап решения СЛАУ, и вычислительные затраты на построение численного решения определяются в основ-

ном затратами на вычисления вектора $F = G^{j-1} + \frac{2}{\Delta t^2} C_{\chi} U^{j-1} - \frac{1}{\Delta t^2} C_{\chi} U^{j-2} + \frac{1}{2\Delta t} C_{\sigma} U^{j-2} - BU^{j-1}$. Затраты же на построение матриц C_{χ} , C_{σ} и

В в целом сравнительно невелики, так как эти матрицы одинаковы на всех временных слоях и поэтому они могут быть построены перед началом процесса движения по временным слоям (если количество временных слоев будет хотя бы около 30-40, что выполняется практически для всех реальных задач, то вычислительные затраты на обработку матриц C_{χ} , C_{σ} и *B* станут примерно на порядок меньше затрат на вычисление векторов *F* на всех временных слоях).

Конечноэлементные аппроксимации уравнения (4.27) обычно приводят к матрицам массы C_{χ} и C_{σ} с ненулевыми компонентами, расположенными не только на главной диагонали, и поэтому на первый взгляд использование МКЭ в сочетании с явной схемой аппроксимации по времени представляется очень неэффективным. Однако к настоящему времени разработаны и довольно широко используются на практике различные приемы, позволяющие без заметного ущерба для точности получаемого численного решения заменять матрицы C_{χ} и C_{σ} матрицами C_{χ} и \tilde{C}_{σ} с ненулевыми компонентами только на главной диагонали, и поэтому МКЭ может также с успехом применяться и в сочетании с явными схемами аппроксимации по времени.

Матричное уравнение (4.30), аппроксимирующее краевую задачу для уравнения (4.28), является системой линейных алгебраических уравнений для вектора U^{j-1} с матрицей $A = \frac{1}{\Delta t^2} C_{\chi} + \frac{1}{2\Delta t} C_{\sigma} + \frac{1}{2} B$ и вектором правой части $F = \frac{1}{2}G^j + \frac{1}{2}G^{j-2} + \frac{2}{\Delta t^2}C_{\chi}U^{j-1} - \frac{1}{\Delta t^2}C_{\chi}U^{j-2} + \frac{1}{2\Delta t}C_{\sigma}U^{j-2} - \frac{1}{2}BU^{j-2}$. Очевидно,

что при любых конечнообъемных и конечноэлементных аппроксимациях члена

-div(pgradu) матрица жесткости *B* будет иметь ненулевые элементы вне главной диагонали, и поэтому вычислительная процедура построения численного решения на базе такой аппроксимации по времени обязательно будет включать в себя этап решения СЛАУ при вычислении решения на каждом временном слое. Преимуществом же такой аппроксимации по времени является то, что получаемая схема абсолютно устойчива при любых сочетаниях шагов по времени и пространству (хотя она может давать нефизичные осцилляции численного решения по времени), в то время как явная схема устойчива лишь при определенном соотношении шагов по времени и пространству, которое может приводить к значительному росту количества необходимых для устойчивого счета временных слоев при использовании пространственных сеток с мелкой ячейкой дискретизации (особенно в случае применения пространственных сеток с локальными сгущениями узлов).

При аппроксимации начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа на сетке с неравномерным шагом по времени удобно использовать тот же подход, которых был использован в предыдущем пункте при построении трехслойной или четырехслойной схемы для уравнения параболического типа. В этом случае решение *и* также должно быть представлено в виде (4.14) для трехслойной схемы или в виде (4.25) для четырехслойной схемы, причем полиномы $\eta_v^i(t)$ определяются соотношениями (4.18)–(4.20) или (4.26) соответственно.

Чтобы получить явную схему аппроксимации уравнения (4.2) с неравномерным шагом по времени, вычислим значения первой и второй производных функций (4.18) – (4.20) при $t = t_{i-1}$

$$\frac{d\eta_2^j(t)}{dt}\bigg|_{t=t_{j-1}} = -\frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1}; \qquad \frac{d^2\eta_2^j(t)}{dt^2}\bigg|_{t=t_{j-1}} = \frac{2}{\Delta t \Delta t_1};$$

$$\frac{d\eta_1^j(t)}{dt}\bigg|_{t=t_{j-1}} = \frac{\Delta t_0 - \Delta t_1}{\Delta t_1 \Delta t_0}; \qquad \frac{d^2\eta_1^j(t)}{dt^2}\bigg|_{t=t_{j-1}} = -\frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0};$$

$$\frac{\left. \frac{d\eta_0^j(t)}{dt} \right|_{t=t_{j-1}} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t \Delta t_0}; \qquad \left. \frac{\left. \frac{d^2 \eta_2^j(t)}{dt^2} \right|_{t=t_{j-1}} = \frac{2}{\Delta t \Delta t_0}.$$

Поскольку с учетом представления (4.14)

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{t=t_{j-1}} &\approx u^{j-2} \frac{d\eta_2^j(t)}{dt} \bigg|_{t=t_{j-1}} + u^{j-1} \frac{d\eta_1^j(t)}{dt} \bigg|_{t=t_{j-1}} + u^j \frac{d\eta_0^j(t)}{dt} \bigg|_{t=t_{j-1}} = \\ &= -\frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} u^{j-2} + \frac{\Delta t_0 - \Delta t_1}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1} + \frac{\Delta t_1}{\Delta t \Delta t_0} u^j, \end{split}$$

$$\begin{split} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \bigg|_{t=t_{j-1}} &\approx u^{j-2} \frac{d^2 \eta_2^j(t)}{dt^2} \bigg|_{t=t_{j-1}} + u^{j-1} \frac{d^2 \eta_1^j(t)}{dt^2} \bigg|_{t=t_{j-1}} + u^j \frac{d^2 \eta_0^j(t)}{dt^2} \bigg|_{t=t_{j-1}} = \\ &= \frac{2}{\Delta t \Delta t_1} u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_1 \Delta t_0} u^{j-1} + \frac{2}{\Delta t \Delta t_0} u^j, \end{split}$$

аппроксимация дифференциального уравнения (4.2) по времени может быть записана в виде

$$\chi \left(\frac{2}{\Delta t \Delta t_{1}} u^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_{1} \Delta t_{0}} u^{j-1} + \frac{2}{\Delta t \Delta t_{0}} u^{j} \right) + \sigma \left(-\frac{\Delta t_{0}}{\Delta t \Delta t_{1}} u^{j-2} + \frac{\Delta t_{0} - \Delta t_{1}}{\Delta t_{1} \Delta t_{0}} u^{j-1} + \frac{\Delta t_{1}}{\Delta t \Delta t_{0}} u^{j} \right) - div \left(p \, grad \, u^{j-1} \right) = f^{j-1}.$$
(4.31)

Конечнообъемная или конечноэлементная аппроксимация краевой задачи для уравнения (4.31) приведет к матричному уравнению вида

$$\frac{2}{\Delta t \Delta t_{1}} C_{\chi} U^{j-2} - \frac{2}{\Delta t_{1} \Delta t_{0}} C_{\chi} U^{j-1} + \frac{2}{\Delta t \Delta t_{0}} C_{\chi} U^{j} - \frac{\Delta t_{0}}{\Delta t \Delta t_{1}} C_{\sigma} U^{j-2} + \frac{\Delta t_{0} - \Delta t_{1}}{\Delta t_{1} \Delta t_{0}} C_{\sigma} U^{j-1} + \frac{\Delta t}{\Delta t \Delta t_{0}} C_{\sigma} U^{j} + B U^{j-1} = G^{j}.$$

$$(4.32)$$

Процесс вычисления U^{i} на основе матричного уравнения (4.32) ничем не отличается от рассмотренного выше процесса вычисления U^{i} на основе матричного уравнения (4.29).

Аналогично может быть построена четырехслойная неявная схема аппроксимации уравнения (4.2) с неравномерным шагом по времени: для этого необходимо учесть представление (4.25) и вычислить при $t = t_j$ первые и вторые производные функций (4.26). Полученная в результате этого неявная схема будет близка по точности схеме (4.28), но при этом она дает заметно меньшие нефизичные осцилляции численного решения и позволяет в процессе счета изменять шаг по времени, что в свою очередь позволяет повысить эффективность используемых вычислительных процедур при решении многих практических задач.

Список литературы

- 1. Bank R.E., Rose D.J. Some error estimates for the box method // SIAM J. Numer. Anal. 1987. Vol.24, P.777-787.
- 2. Cai Z. A theoretical foundation of the finite volume element method // Thes. University of Colorado at Danver, may 1990.
- 3. Cai Z. On the finite volume element method // Numer. Math. 1991. Vol.58. P.713-735.
- 4. Cai Z., McCormic S. On the accuracy of the finite volume element method // SIAM J. Numer. Anal. 1990. Vol.27. P.636-655.
- 5. Hackbush W. On first and second order box schemes. // Computing. 1989. Vol. 41. P.227-296.
- 6. Ильин В.П., Туракулов А.А. Об интегробалансных аппроксимациях трехмерных краевых задач. Новосибирск, 1993. 24 с. (Препринт / РАН, Сиб. отд-ние ВЦ; № 986)
- 7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
- Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
- 9. Митчел Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 216с.
- 10.Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. – 432 с.
- 11. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304с.
- 12.Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- 13.Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.– М.: Мир, 1979. 392 с.
- 14.Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 350 с.